Riemann sommen

In het boek Moderne Wiskunde vwo bovenbouw, wiskunde B1 deel 4, wordt het verschil tussen de verschillende Riemann-sommen in mijn ogen niet erg duidelijk aangegeven. Ook worden de verschillende soorten door elkaar gebruikt zonder dit aan te geven. Vandaar deze bijlage.

De Riemann-som is erg ruim gedefinieerd, daarom bestaat er ook niet iets als DÉ Riemann-som. Je hebt veel verschillende vormen, waarvan tot de stof de ondersom en bovensom horen. Verder heb je ook het middelpunt en trapezoïde Riemann-sommen, waar we verder geen aandacht aan zullen schenken.

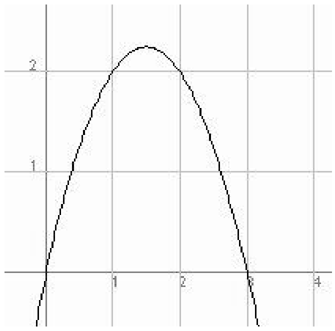
In paragraaf 6.1 gaat het over de onder- en bovensom. Vervolgens stappen ze over op de notatie $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ wat ons de indruk geeft dat deze formule een onder- of bovensom uitrekent. Dit is echter onjuist zoals uit onderstaand voorbeeld zal blijken. De formule $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ rekent onder- en bovensommen door elkaar uit en telt ze bij elkaar op. Deze verschillen hebben te maken met als de grafiek bijvoorbeeld stijgend is, je dan bijvoorbeeld een ondersom uitrekent en als hij dalend is, je dan een bovensom aan het uitrekenen bent. En andersom natuurlijk.

Even een simpel voorbeeldje om dit te verduidelijken.

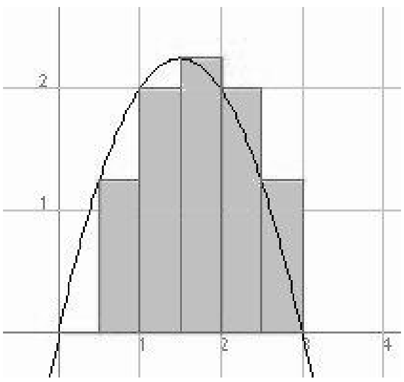
Laten we de functie $f(x) = -x^2 + 3x$ hiernaast bekijken.
We willen de oppervlakte onder deze grafiek aan de hand van Riemann-sommen benaderen. We nemen in dit voorbeeldjes subintervallen van 0,5 breed.
De formule wordt

$$\sum_{k=1}^{6} f(x_k)\cdot 0,5 = f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5)$$

als je steeds voor het linkerpunt van het subinterval de oppervlakte van het Riemann-blokje uitrekent. Zie de figuur hieronder.



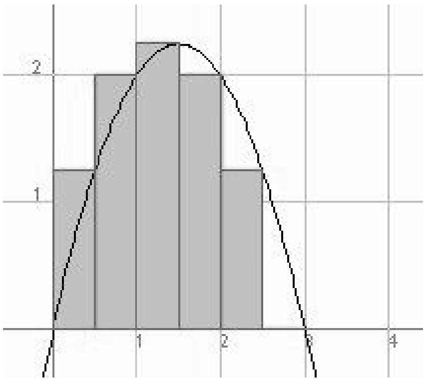
Figuur 1



Figuur 2

Je ziet duidelijk wat er hier gebeurt: als de grafiek stijgt dan gaat het over een ondersom en op het moment dat de grafiek gaat dalen over een bovensom.

Als we nu voor het rechterpunt van de subintervallen de oppervlakte gaan uitrekenen dan wordt de formule $\sum_{k=1}^{6} f(x_k)\cdot 0,5 = f(0,5)+f(1)+f(1,5)+f(2)+f(2,5)+f(3)$ en ziet de grafiek er als volgt uit:



Figuur 3

We hebben nu dus gezien dat de formule $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ geen formule is voor het berekenen van de onder- of bovensom als de grafiek op je domein van stijgen overgaat in dalen of andersom. Als er dus gevraagd wordt om de boven- of ondersom te berekenen moet je dus weten hoe de grafiek eruit ziet. Wordt er gevraagd om $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ uit te rekenen dan kun je de formule rechtstreeks toepassen.

Hoe bereken je op je Casio CFX-9850GB $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$?

Ik zal hier twee manieren behandelen:

1) In het RUN menu onder OPTN → CALC vind je de functie $\sum($. Hiermee kun je heel eenvoudig $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ uitrekenen: $\sum(f(x)\times\Delta x, x, \text{beginpunt}, \text{eindpunt}, \Delta x)$.
   In ons voorbeeld van hierboven wordt dit:
   $\sum((-x^2+3x)\times 0.5, x, 0, 2.5, 0.5) = 4,375$. De oppervlakte van de Riemann-blokjes uit figuur 2 zijn hier berekend.

2) Casio zelf heeft een programma RIEMANN. Deze staat niet standaard in je programmalijst en zul je dus eerst zelf moeten laden. Ga naar het menu PRGM en klik eerst op F6 om de knop 'load' te zien, laad dan het programma uit de software library van de U.S.A.
   Om RIEMANN te kunnen gebruiken moet je eerst de functie die je nodig hebt in het functiegeheugen zetten (dit doe je in het RUN menu onder OPTN → FMEM, tik de functie in, klik op STO en vervolgens op f6).
   Als je dat gedaan hebt en het programma draait dan vraagt hij eerst om het interval en in hoeveel subintervallen je dit interval wilt opdelen. Vervolgens maak je een keuze uit (1) left endpoint, (2) right endpoint, (3) midpoint of (4) trapezoid.
   Wij kiezen in navolging van ons voorbeeld hierboven voor (1) left endpoint en we krijgen hier ook het antwoord 4,375.

Wil je één van deze programma's ook gebruiken voor het berekenen van onder- en/of bovensommen dan moet je ook rekening houden met de vorm van de grafiek. Waar stijgt of daalt de grafiek?