Wiskunde A1,2

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 00

Tijdvak 1
Donderdag 25 mei
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 8 en 10 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Opgave 1 Hoe lang is een Nederlander?

In een krantenartikel werd beschreven hoe een kind zijn (of haar) toekomstige lichaamslengte kan berekenen:

tekst 1

„Tel de lengten (in cm) van je vader en moeder bij elkaar op en deel het getal door twee. Je hebt dan de gemiddelde lengte van je ouders. Als je een meisje bent, trek je daar zes van af. Als je een jongen bent, tel je er zes bij op. Dat doe je omdat mannen gemiddeld langer worden dan vrouwen. Daarna tel je er nog eens drie bij op. Dat moeten zowel de jongens als de meisjes doen, want die drie centimeter worden alle kinderen gemiddeld langer dan hun ouders. Dan weet je hoe lang je waarschijnlijk zult zijn als je stopt met groeien."

4p **1** □ Bereken de te verwachten lengte van een jongen met een vader van 185 cm en een moeder die 167 cm lang is.

Het is mogelijk om met behulp van bovenstaande tekst formules te maken om iemands te verwachten lengte in cm te bepalen. Noem de lengte in cm van de vader *va* en die van de moeder *mo*.

4p **2** □ Stel een formule op voor de te verwachten lengte van een meisje.

In het krantenartikel stond ook:

tekst 2

„Elke generatie wordt 3 cm langer dan de vorige. Dat betekent dat de gemiddelde lengte van de Nederlanders elke 10 jaar 1 cm groter wordt. Als dat zo doorgaat, dan is in het jaar 2150 de helft van de Nederlandse mannen meer dan 2,00 meter."

Neem aan dat de stijging van de gemiddelde lengte inderdaad zo verloopt als in tekst 2 staat. Je mag er van uitgaan dat de lengte van de Nederlandse mannen normaal verdeeld is met een constante standaardafwijking van 8 cm maar met een stijgend gemiddelde.

7p **3** □ Hoeveel procent van de Nederlandse mannen is dan in het jaar 2010 langer dan 2,00 meter? Licht je antwoord toe.

Opgave 2 Enquête

Opiniepeilingen worden vaak telefonisch gedaan, maar voor bepaalde soorten enquêtes stuurt een onderzoeksbureau enquêteurs met een vragenlijst op pad. Aselect wordt een aantal adressen getrokken. Het onderzoeksbureau laat enquêteurs die adressen bezoeken om de bewoners van die adressen vragen te stellen.

Voor een onderzoek moeten 1400 adressen worden bezocht. Er zijn hiervoor 4 vaste medewerkers beschikbaar en 16 studenten die dit als bijbaantje hebben. Een vaste medewerker krijgt een groter aantal adressen dan een student. Iedere vaste medewerker krijgt evenveel adressen. Ieder van de 16 studenten krijgt ook een gelijk aantal adressen, maar dat zijn er 30 minder dan het aantal dat een vaste medewerker krijgt.

De 1400 adressen kunnen 'precies' verdeeld worden.

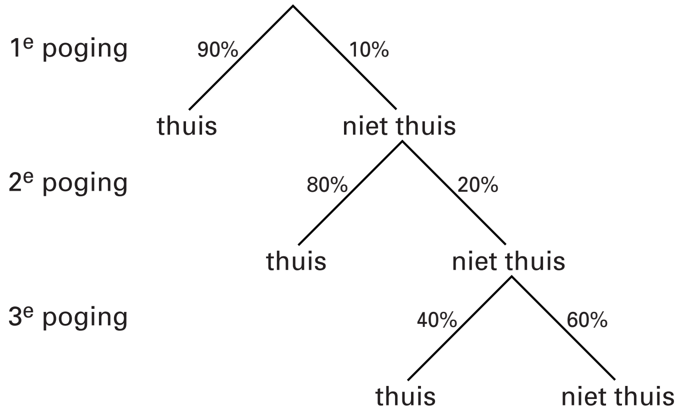
5p **4** □ Laat dit zien door te berekenen hoeveel adressen een vaste medewerker en hoeveel adressen een student krijgt.

Als er niet 1400 maar 1405 adressen te verdelen zijn, worden eerst de 1400 adressen 'precies' verdeeld. De overblijvende 5 adressen worden dan verloot onder de 20 enquêteurs. Daarbij heeft iedereen dezelfde kans op een extra adres, maar niemand krijgt er meer dan één adres bij.

4p **5** □ Bereken de kans dat deze 5 adressen allemaal bij de 16 studenten terecht komen.

Wanneer de enquêteur op een adres komt waar niemand thuis is, probeert hij het later voor de tweede keer. Als ook bij het tweede bezoek niemand thuis is, doet hij bij dit adres nog een derde poging. Die derde keer is ook de laatste keer, zelfs als er dan weer niemand thuis is. Uit ervaring weet men dat de kans dat iemand thuis is de eerste keer het grootst is. Bij de tweede poging is de kans wat kleiner en bij het derde bezoek zelfs veel kleiner.
Stel dat bij het eerste bezoek op 90% van de adressen iemand thuis is. Bij de adressen waar men de eerste keer niet thuis was, is 80% bij het tweede bezoek wel thuis. Op de adressen waar een derde poging nodig is, is bij dat derde bezoek 40% thuis. Zie figuur 1.

figuur 1



4p **6** □ Bereken de kans dat de enquêteur op een adres pas bij het derde bezoek iemand thuis treft.

Het onderzoek wordt gehouden bij 1400 verschillende adressen.

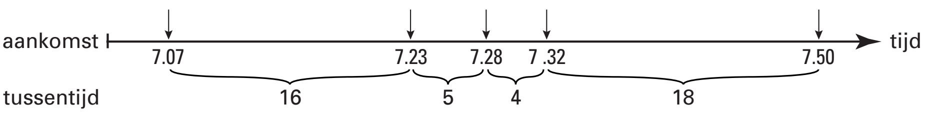
6p **7** □ Bereken hoeveel keer in totaal er een adres zal worden bezocht voor dit onderzoek.

Opgave 3 Luchtdrukte

In deze opgave bekijken we de aankomst van vliegtuigen op een vliegveld. Gewoonlijk zeggen we bijvoorbeeld dat er gemiddeld 10 vliegtuigen per uur aankomen. Het is dan meestal niet zo dat er elke 6 minuten een vliegtuig aankomt. Soms komen er veel, dan weer weinig vliegtuigen achter elkaar binnen. De *tussentijd* van een vliegtuig is de tijd (in minuten) tussen de aankomst van het vorige vliegtuig en de aankomst van het betreffende vliegtuig. Het eerste vliegtuig dat aankomt nadat het vliegveld geopend is, heeft geen tussentijd. In figuur 2 zie je de aankomsttijden van de eerste vijf vliegtuigen op een dag en de bijbehorende tussentijden.

figuur 2

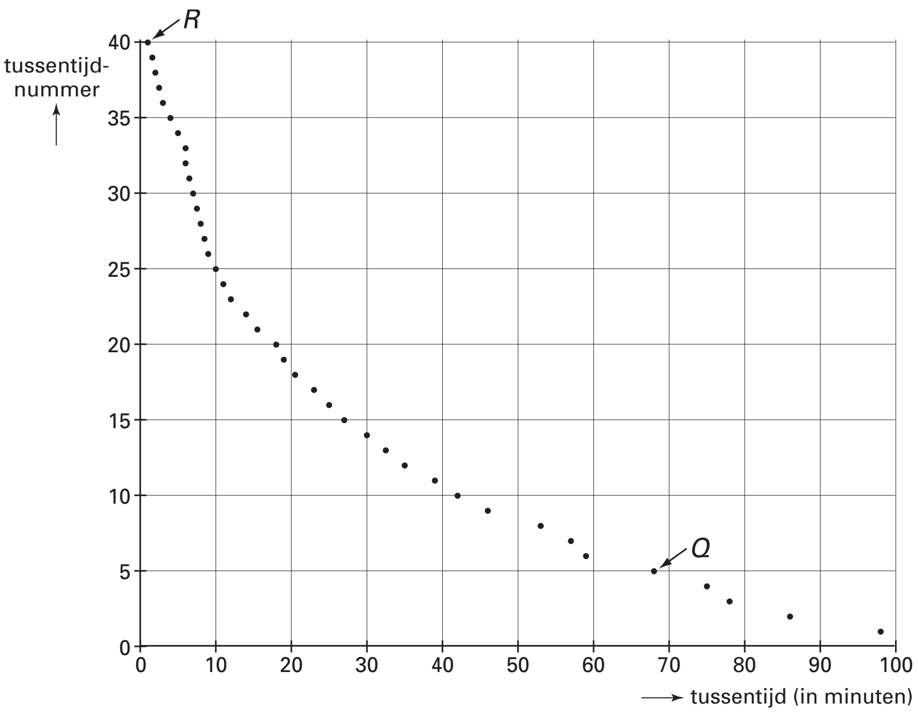
Aankomst van de eerste vijf vliegtuigen van de dag



Alle tussentijden worden vervolgens van groot naar klein op volgorde gezet en in een grafiek weergegeven.

In figuur 3 staan de tussentijden van de vliegtuigen voor een bepaalde periode voor een klein vliegveld.

figuur 3

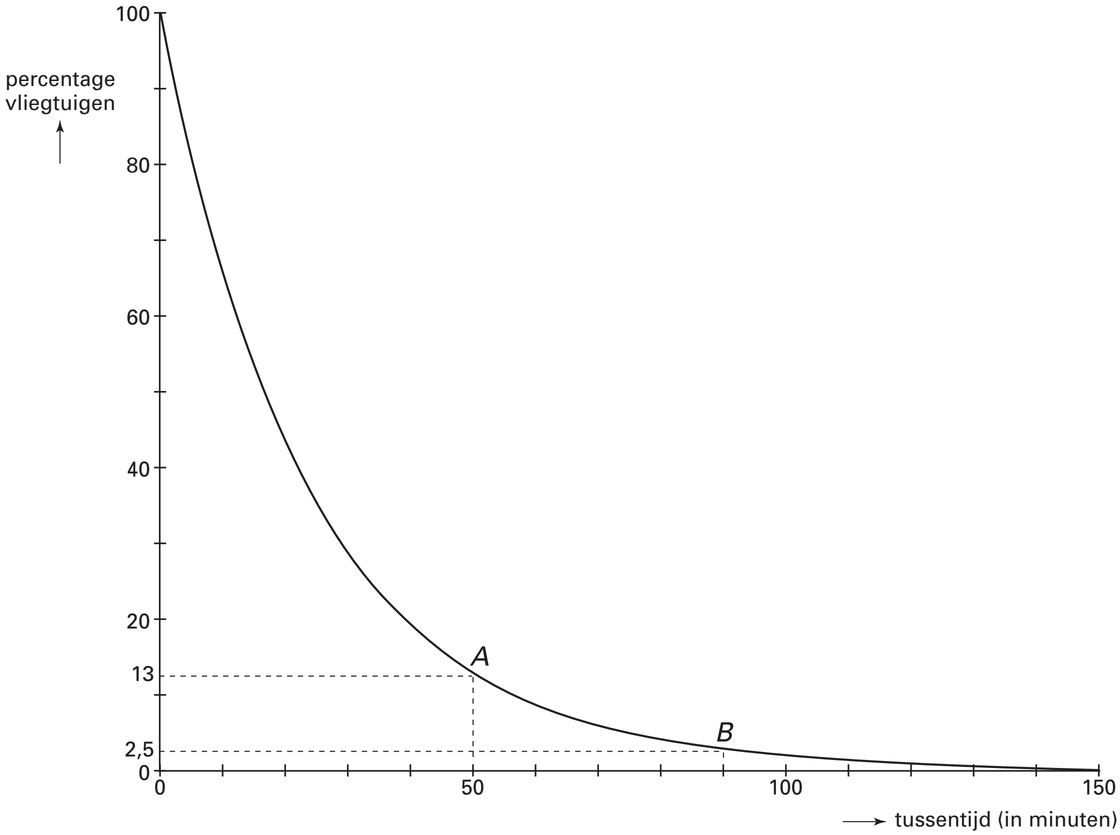


In de figuur zijn de 40 tussentijden weergegeven door 40 stippen. Bij elke stip kun je de bijbehorende tussentijd aflezen op de horizontale as en het nummer op de verticale as. Punt *Q* bijvoorbeeld hoort bij een vliegtuig met tussentijd 68 minuten. Het is tussentijdnummer 5 omdat vier tussentijden nog groter waren. Anders gezegd: er zijn 5 vliegtuigen met een tussentijd van 68 minuten of meer.
Bij punt *R* hoort de kleinste tussentijd: 1 minuut.

5p **8** □ Teken op de bijlage een histogram van de tussentijden. Geef daarin de frequenties van de tussentijden per klasse weer met een klassenbreedte van 20 minuten.

Als tussentijden van aankomende vliegtuigen op andere vliegvelden of gedurende andere periodes op de manier van figuur 3 worden weergegeven, ontstaat telkens een zelfde soort grafiek. In figuur 4 is een model van dit type grafiek getekend. Langs de verticale as staan nu percentages. Figuur 4 staat ook op de bijlage.

figuur 4



Je kunt in figuur 4 bijvoorbeeld aflezen dat 13% van de vliegtuigen een tussentijd heeft van 50 minuten of meer (punt A) en dat 2,5% een tussentijd heeft van 90 minuten of meer (punt B).

In figuur 4 lees je ook af dat 50% van de vliegtuigen volgens dit model een tussentijd heeft van 17 minuten of meer (en ook 50% een tussentijd van minder dan 17 minuten). De gemiddelde tussentijd is niet gelijk aan 17 minuten.

3p **9** □ Onderzoek of de gemiddelde tussentijd groter of kleiner dan 17 minuten is.

Aan de hand van figuur 4 kan een boxplot van de tussentijden gemaakt worden.

5p **10** □ Teken de boxplot. Licht je werkwijze toe. Gebruik daarbij de figuur op de bijlage.

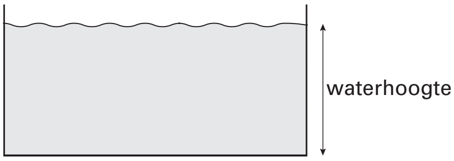
Er is een formule van de vorm $y = b \cdot g^t$ die goed past bij de grafiek in figuur 4. Hierbij is t de tussentijd in minuten en y het percentage vliegtuigen met een tussentijd van t minuten of meer.

4p **11** □ Hoe groot zijn b en g? Licht je antwoord toe.

Opgave 4 Wiskunde in bad

Misschien is het je na het nemen van een bad wel eens opgevallen dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind. Aan de hand van een wiskundig model gaan we dat hier onderzoeken. De vorm van het bad is een rechthoekige bak. Nadat we de stop eruit getrokken hebben, wordt de hoogte van het badwater steeds kleiner. Deze hoogte noemen we de waterhoogte. Zie figuur 5.

figuur 5



Tijdens het leeglopen wordt op een aantal tijdstippen de waterhoogte gemeten.
Bij deze meetresultaten past de volgende formule:

$$\textit{waterhoogte} = (7 - 0{,}03t)^2$$

Hierbij wordt de *waterhoogte* gegeven in centimeter en de tijd t in seconden.
Als het bad vol is, is volgens de formule de waterhoogte 49 cm. Op $t = 0$ begint het bad leeg te lopen.

Als de waterhoogte gelijk is aan 0 is het bad helemaal leeggelopen.

3p **12** □ Toon aan dat het leeglopen van het bad ongeveer 233 seconden duurt.

5p **13** □ Leg uit met behulp van een schets van de grafiek van de waterhoogte dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind.

De formule van de waterhoogte kan ook geschreven worden als

$$\textit{waterhoogte} = 49 - 0{,}42t + 0{,}0009t^2$$

Aangezien de waterhoogte daalt tussen $t = 0$ en $t = 233$, zal de afgeleide daar steeds negatief zijn. Met behulp van deze afgeleide kun je aantonen dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind.

6p **14** □ Toon dit aan met behulp van een schets van de grafiek van de afgeleide.

Bij het leeglopen van het bad is het bad op een gegeven moment nog maar half vol. De waterhoogte is dan de helft van wat het oorspronkelijk was. De tijd die hiervoor nodig is, noemen we de *leeglooptijd eerste helft*. De tijd die vervolgens nodig is om het bad verder leeg te laten lopen, noemen we de *leeglooptijd tweede helft*. Die tweede helft kost natuurlijk meer tijd, het gaat immers steeds langzamer.
De verhouding tussen deze leeglooptijden noemen we de *leegloopverhouding*. In een formule:

$$\textit{leegloopverhouding} = \frac{\textit{leeglooptijd tweede helft}}{\textit{leeglooptijd eerste helft}}$$

De leegloopverhouding blijkt voor alle rechthoekige baden hetzelfde te zijn.

6p **15** □ Bereken deze leegloopverhouding.

Opgave 5 Boekwaarde

Een kopieerapparaat is een jaar na aanschaf minder waard dan op het moment van aanschaf. In de volgende jaren neemt de waarde nog verder af.
De waarde van het kopieerapparaat op zeker moment noemen we de *boekwaarde* van het apparaat en de waardedaling wordt de *afschrijving* genoemd. Er zijn verschillende methoden om de boekwaarde te berekenen. Die methoden leiden vaak tot verschillende boekwaarden. In deze opgave bekijken we er drie.

Een voetbalclub heeft een nieuw kopieerapparaat van *f* 10 000,– gekocht. Na 10 jaar heeft dit apparaat nog een waarde van *f* 1000,–. Er zal dus in 10 jaar *f* 9000,– moeten worden afgeschreven. In tabel 1 staan de boekwaarden (in guldens) bij aanschaf, na 5 jaar en na 10 jaar volgens drie methoden (I, II, III). De boekwaarde geven we aan met de letter B; t is de tijd (in jaren) vanaf het moment van aanschaf.

tabel 1

	Boekwaarde B		
tijdstip t	I	II	III
0	10 000	10 000	10 000
5	5500	3162	3455
10	1000	1000	1000

Bij methode I daalt de boekwaarde gelijkmatig. De boekwaarde B (in guldens) na t jaar kan berekend worden met de formule $B = 10\,000 - 900t$.

3p **16** □ Leg uit hoe het getal –900 in deze formule met behulp van de tabel berekend kan worden.

Bij methode II wordt de boekwaarde ieder jaar met een vaste groeifactor vermenigvuldigd.
De boekwaarde kan op elk moment (dus ook gedurende het jaar) berekend worden met de formule $B = 10\,000 \cdot 0{,}7943^t$.

5p **17** □ Onderzoek na hoeveel tijd de boekwaarde volgens deze methode de helft is van de nieuwprijs van *f* 10 000,–.

Bij methode III hoort de volgende formule voor de boekwaarde:
$B = 10\,000 - 1718{,}18t + 81{,}82t^2$.
Voor deze methode is voor elk jaar de boekwaarde gegeven in tabel 2.

tabel 2

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	10 000	8364	6891	5582	4436	3455	2636	1982	1491	1164	1000

Met behulp van deze boekwaarden kan voor elk jaar de afschrijving berekend worden.

6p **18** □ Laat zien dat bij deze methode de jaarlijkse afschrijvingen vrijwel lineair dalen.

Het kopieerapparaat wordt na 10 jaar voor *f* 1000,– verkocht. Als het kopieerapparaat eerder bij een brand verloren gaat, zal de vereniging een schadeclaim indienen bij de maatschappij waar de brandverzekering is afgesloten. De verzekeringsmaatschappij zal dan kijken naar de boekwaarde op het moment van de brand.
De penningmeester van de voetbalclub gebruikt voor de afschrijving methode I.
Hij berekent de boekwaarde dus met $B = 10\,000 - 900t$. Maar hij weet dat de verzekeringsmaatschappij methode III gebruikt. Dus zij berekenen de boekwaarde met $B = 10\,000 - 1718{,}18t + 81{,}82t^2$. Dat is voor de verzekeringsmaatschappij veel gunstiger. Hun boekwaarde is altijd lager dan die van de penningmeester. Dus hoeven ze in geval van brand minder uit te betalen. De penningmeester realiseert zich dat dit verschil behoorlijk groot kan zijn.

5p **19** □ Hoe groot is dit verschil in boekwaarde maximaal? Licht je antwoord toe.

Einde