wiskunde B1

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 **04**

Tijdvak 1
Donderdag 3 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Kogelstoten

Kogelstoten is een onderdeel van de atletiek waarbij het doel is een zware kogel volgens een speciale techniek zover mogelijk weg te werpen; zie foto. Omdat dit veel kracht vereist, hebben kogelstoters een stevig postuur.
Voor jonge ongetrainde mensen is vooral het lichaamsgewicht van invloed op de prestatie. Hoe zwaarder de persoon is, hoe verder er gegooid kan worden.
Neem bijvoorbeeld de volgende resultaten van twee deelnemers aan een sportdag (zie tabel 1).

foto

tabel 1

Deelnemer	André	Bernard
Gewicht (kg)	52,2	74,1
Afstand (m)	12,62	16,37

Bernard heeft verder gegooid dan André, maar hij is ook zwaarder. Om hun prestaties beter te kunnen vergelijken, rekent men de gegooide afstand om in een score.
Daarvoor gebruikt men de volgende formule: $S = A - k \cdot (G - 50)$ met
A = de gegooide afstand in meters
G = het lichaamsgewicht van de kogelstoter in kilogrammen
k = een correctiefactor, te bepalen door de wedstrijdjury
S = de score

De resultaten van de omzetting van afstanden in scores met $k = 0,1$ voor André en Bernard staan in tabel 2.

tabel 2

Deelnemer	André	Bernard
Score bij $k = 0,1$	12,40	13,96

3p **1** ☐ Onderzoek of Bernard ook bij $k = 0,2$ de hoogste score heeft.

Er is een waarde van k waarbij André en Bernard een gelijke score hebben.
3p **2** ☐ Bereken die waarde van k. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Bij een tweede manier om aan een afstand A een score T toe te kennen gebruikt men de formule: $T = A \cdot \left(\frac{50}{G}\right)^{\frac{2}{3}}$

Deelnemer Cor haalde een afstand van 14,32 meter. Hij kreeg bij de eerste formule met $k = 0,1$ een score van 14,21.
4p **3** ☐ Bereken de score van Cor volgens de tweede formule.

Een kogelstoter met een gewicht van 101 kg heeft de kogel 15,71 meter ver gegooid.
Bij de formule $S = A - k \cdot (G - 50)$ hangt de waardering hiervoor af van de waarde van k.
4p **4** ☐ Onderzoek bij welke waarden van k de formule voor S een lagere waardering geeft dan de formule voor T. Rond de grenswaarde af op drie decimalen.

Geluidssnelheid in de atmosfeer

Men gaat er vaak vanuit dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de volgende formule:

$$V = 331\sqrt{1+\frac{T}{273}}$$

Hierbij is V de snelheid van het geluid in meter per seconde bij een temperatuur van T graden Celsius.

In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van –27,4 °C tot 38,6 °C. De laagste temperatuur van –27,4 °C werd op 27 januari 1942 in Winterswijk gemeten. De hoogste temperatuur van 38,6 °C werd op 23 augustus 1944 in Warnsveld bereikt. Neem aan dat de temperaturen gemeten zijn bij windstil weer.

3p **5** ☐ Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen.

Bij de volgende vragen gaan we steeds uit van een temperatuur van 15 °C op 0 km hoogte.

In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot −50 °C volgens de formule $T = 15 - 6,5h$. Hierbij is h de hoogte in kilometer.

Als deze formule wordt gecombineerd met de formule $V = 331\sqrt{1+\frac{T}{273}}$ kan worden afgeleid dat voor het verband tussen V en h bij benadering de volgende formule geldt:

$$V = 331\sqrt{1,0549 - 0,0238h}$$

3p **6** ☐ Leid deze formule af.

Een grote afstand, zoals bijvoorbeeld Amsterdam - Toronto, moet met een passagiersvliegtuig snel afgelegd kunnen worden. Dat kan alleen als het vliegtuig hoog vliegt omdat dan de luchtweerstand klein is. Voor passagiersvliegtuigen zoals de Boeing 747 mag de snelheid echter hoogstens 90% van de geluidssnelheid zijn. Een Boeing 747 wil een snelheid maken van 975 km per uur (270,8 m/s).

4p **7** ☐ Bereken tot op welke hoogte dit vliegtuig kan vliegen.
Geef het antwoord in kilometers afgerond op één decimaal.

Een Afrikaans spelletje

Ans en Bert spelen een Afrikaans spelletje op een bord met acht ringen (zie figuur 1). Ze hebben beiden een blokje en verder is er nog een steentje. Bij het begin staan beide blokjes buiten het speelbord.
Bert neemt, zonder dat Ans dit ziet, het steentje in een van beide handen en Ans moet raden in welke hand het steentje zit (zie foto).

De volgende spelregels gelden:

1 Als Ans de eerste keer goed raadt, mag zij haar blokje in ring 1 zetten en mag ze opnieuw raden. Zolang ze goed blijft raden schuift ze telkens haar blokje op het speelbord een ring verder.

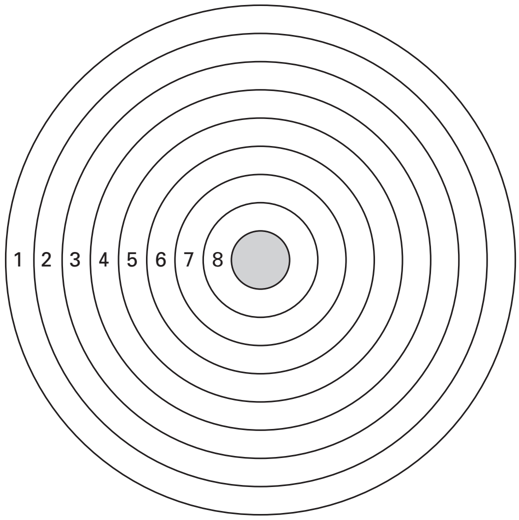
2 Als Ans fout raadt, wordt er geen blokje verschoven. Ans krijgt dan het steentje en Bert moet raden.

3 Voor Bert geldt dan hetzelfde als in regel 1 en 2 voor Ans.

4 Bij de volgende beurten van de spelers gaat het spel verder vanuit de plaats waar hun blokje bij een vorige beurt gekomen was.

5 Degene die in ring 8 is aangekomen en vervolgens goed raadt, schuift het blokje door naar het centrum en is winnaar. Het spel is dan afgelopen.

figuur 1



foto

Ga er bij de volgende vragen van uit dat Ans begint en dat beide spelers een kans van $\frac{1}{2}$ hebben om goed te raden.

Het is mogelijk dat Ans het spel wint zonder dat Bert aan de beurt komt om te raden.

3p **8** ☐ Bereken de kans op dit spelverloop.
Rond je antwoord af op drie decimalen.

Als Ans goed raadt, noteren we A;
als ze fout raadt, noteren we a.
Als Bert goed raadt, noteren we B;
als hij fout raadt, noteren we b.

Nadat er in totaal vier keer (door Ans en Bert samen) geraden is, kan de uitkomst bijvoorbeeld AAAA zijn. Het blokje van Ans ligt dan in ring 4 en dat van Bert ligt nog buiten het bord.

4p **9** ☐ Onderzoek of het mogelijk is dat na in totaal vier keer raden het ene blokje in ring 1 ligt en het andere in ring 3.
Leg je antwoord uit.

Na in totaal drie keer raden, waarbij Ans begint, zijn er verschillende situaties mogelijk. Hieronder is een begin gemaakt met een tabel waarin deze verschillende situaties zijn weergegeven samen met de stand die dit geeft op het speelbord. Deze tabel moet nog worden aangevuld met een aantal rijen.

tabel 3

Verloop	Ringnummer blokje Ans	Ringnummer blokje Bert
AAA	3	-
AAa	2	-

5p **10** ☐ Vul de tabel aan met de nog ontbrekende rijen en vul deze in.

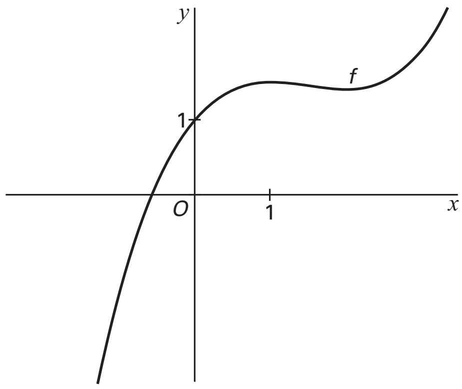
In een nieuw spelletje hebben op een gegeven moment beide spelers hun blokje in ring 8 staan.

4p **11** ☐ Bereken de kans dat er in totaal minder dan vier keer geraden wordt tot het spel is afgelopen.

Raken

Gegeven is de functie *f* door
$f(x) = 0,2x^3 - 0,9x^2 + 1,2x + 1$
In figuur 2 is de grafiek van *f* getekend.

figuur 2

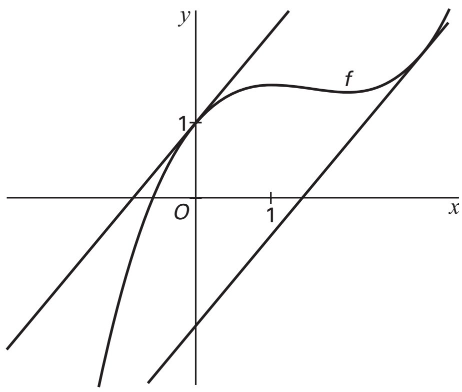


Hierin is te zien dat de *y*-coördinaten van de beide toppen niet veel verschillen.

6p **12** ☐ Bereken met behulp van differentiëren het verschil tussen deze *y*-coördinaten.

Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt 1,2 die aan de grafiek van *f* raken. Zie figuur 3.

figuur 3

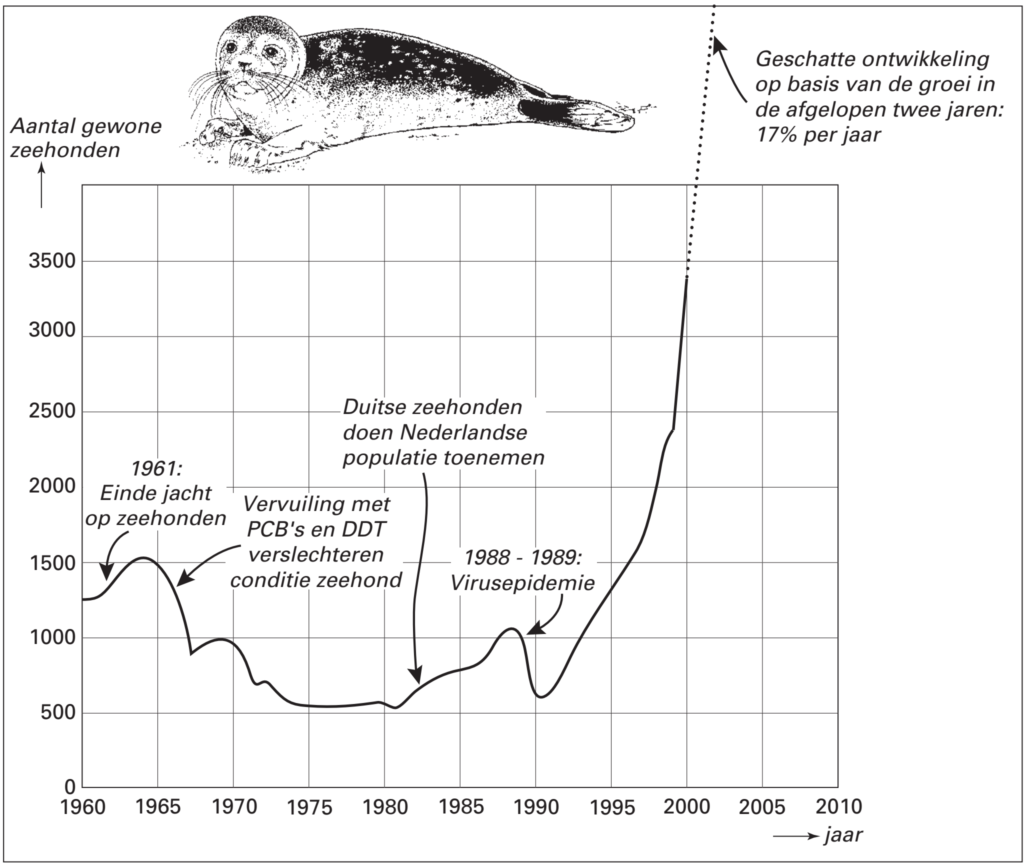


4p **13** ☐ Onderzoek of er ook twee lijnen zijn met richtingscoëfficiënt −0,1 die aan de grafiek van *f* raken.

Zeehonden

In een artikel van 19 mei 2001 in de Volkskrant wordt de ontwikkeling van de zeehondenpopulatie in de Nederlandse Waddenzee beschreven.
De grafiek in figuur 4 komt uit dit artikel.

figuur 4 **Getelde zeehonden in de Nederlandse Waddenzee**



Bekijk de volgende periodes van 10 jaar: 1960–1970, 1970–1980, 1980–1990, 1990–2000.

4p **14** ☐ Teken een toenamendiagram van het aantal getelde zeehonden bij deze perioden.

In het krantenartikel wordt gemeld dat er in 2000 en 2001 sprake is van een populatiegroei van 17 procent per jaar. Neem bij de volgende twee vragen aan dat dit juist is.
Aan het eind van 2001 waren er ongeveer 3900 zeehonden.

3p **15** ☐ Bereken het aantal zeehonden aan het eind van 1999.

In hetzelfde krantenartikel wordt de volgende conclusie getrokken:
Bij voortzetting van de huidige exponentiële groei zal de maximale capaciteit van de Waddenzee snel bereikt zijn. De maximale capaciteit van de Waddenzee is 16000.

3p **16** ☐ Bereken in welk jaar deze maximale capaciteit bereikt wordt.

Het wiskundig model waarin de zeehondenpopulatie met een vast percentage per jaar zal blijven groeien is onwaarschijnlijk.
Daarom wordt een ander wiskundig model voor het aantal zeehonden voorgesteld.

Dit andere model wordt gegeven door de formule: $A = \dfrac{16000}{1 + 3,84 \cdot 0,8082^t}$

Hierin is A het aantal zeehonden en t de tijd in jaren vanaf eind 2000.

Het laatste model stemt vrijwel overeen met de ongeveer 3900 zeehonden die eind 2001 geteld werden.

3p **17** ☐ Onderzoek of in dit laatste model het jaarlijkse groeipercentage van 2001 naar 2002 ook bij benadering gelijk is aan 17%.

De Amerikaanse presidentsverkiezingen in 2000

foto

De belangrijkste presidentskandidaten in de VS in 2000 waren George W. Bush en Al Gore. Daarnaast was er een aantal minder bekende kandidaten.

Landelijk bleken Bush en Gore het bij de kiezers bijna even goed te doen. In de staat Florida met meer dan zes miljoen stemgerechtigden, is uiteindelijk de beslissing gevallen. Na tellen en hertellen van de stembiljetten bleek het verschil slechts 300 stemmen te zijn in het voordeel van Bush. We gaan in deze opgave onderzoeken hoe toevallig zo'n gebeurtenis is.

Neem in deze opgave aan dat Bush en Gore de enige kandidaten waren. Neem verder aan dat elke stem die wordt uitgebracht met 50% kans van een aanhanger van Bush is en met 50% kans van een aanhanger van Gore.

Stel dat er in Florida slechts vier mensen stemden.

4p **18** ☐ Bereken de kans dat Bush dan precies twee stemmen kreeg.

We gaan nu uit van een onbekend aantal uitgebrachte stemmen.

4p **19** ☐ Leg uit dat bij een oneven aantal uitgebrachte stemmen de kans dat Bush wint gelijk is aan 50%.

We simuleren de verkiezingen voor 60 kiezers door 60 keer een zuivere munt op te gooien. Bij deze munt staat op de ene kant een afbeelding van Bush en op de andere kant een afbeelding van Gore.

5p **20** ☐ Bereken de kans dat de afbeelding van Bush 29, 30 of 31 keer bovenkomt. Rond je antwoord af op vier decimalen.

We laten een computer nu precies zes miljoen worpen met de munt nabootsen. Wiskundigen hebben aangetoond dat bij deze simulatie het aantal stemmen voor Bush bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3 000 000 en een standaardafwijking van 1225 stemmen.

5p **21** ☐ Bereken de kans dat Bush in deze simulatie wint met hoogstens 300 stemmen verschil.

Einde