

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 3, 4, 13 en 19 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Speelgoedfabriek

Een speelgoedfabrikant maakt houten poppenhuizen en houten treinen. Voor het vervaardigen van het speelgoed onderscheiden we drie soorten arbeid: zagen, timmeren en verven. Het aantal minuten dat hiervoor nodig is, vind je in onderstaande tabel 1.

tabel 1

soort arbeid	tijd (in minuten) nodig per poppenhuis	tijd (in minuten) nodig per trein
zagen	24	15
timmeren	60	40
verven	40	10

Er is één personeelslid belast met het zagen, twee met het timmeren en één met het verven. Elk van deze vier personeelsleden kan maximaal 40 uren per week werken.

Het aantal poppenhuizen dat per week wordt gemaakt, geven we aan met x . Het aantal treinen dat per week wordt gemaakt, geven we aan met y .

Op grond van bovenstaande gegevens kunnen we voor deze variabelen de volgende beperkende voorwaarden opstellen:

I $8x + 5y \leq 800$

II $3x + 2y \leq 240$

III $4x + y \leq 240$

IV $x \geq 0$

V $y \geq 0$

4p **1** Toon aan dat voorwaarde II volgt uit de gegevens.

We gaan er in deze opgave van uit dat de kosten voor het maken van het speelgoed bestaan uit materiaalkosten en arbeidskosten. Aan materiaal kost een poppenhuis 17 euro en een trein ook 17 euro. Ieder personeelslid kost 30 euro per gewerkt uur. Alleen voor de gewerkte uren wordt het personeel betaald.

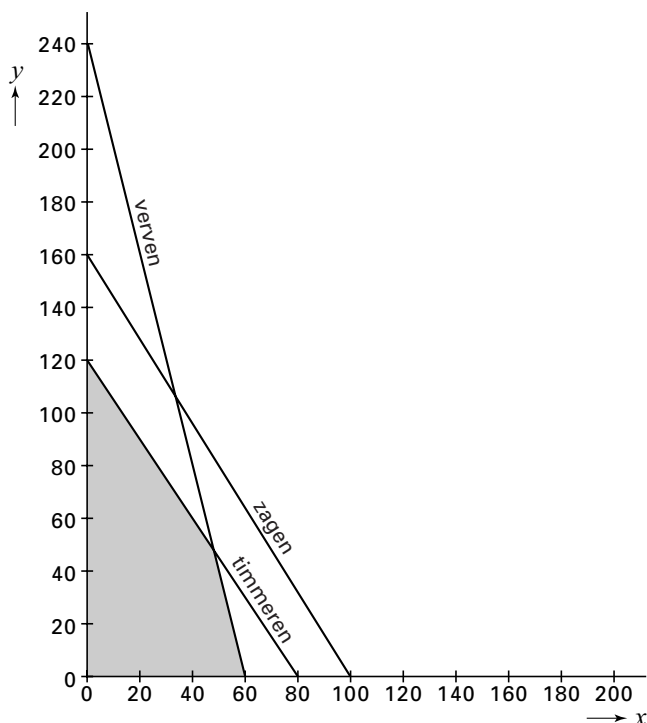
Alle exemplaren die in een week worden gemaakt, worden nog in diezelfde week verkocht. De poppenhuizen worden verkocht voor 97 euro per stuk, de treinen voor 58,50 euro per stuk.

De winst in euro's die wekelijks op het speelgoed wordt gemaakt, geven we aan met W .

5p **2** Toon aan dat voor W de volgende formule geldt: $W = 18x + 9y$.

De grenslijnen die horen bij de beperkende voorwaarden, zijn getekend in figuur 1. Het toegestane gebied is grijs gemaakt. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 1



- 6p **3** □ Bereken de maximale winst die wekelijks kan worden behaald. Gebruik daarbij zo nodig de figuur op de bijlage.

Degene die met het zagen belast is, noemen we hierna de *zager*.

In figuur 1 ligt de grenslijn die op het zagen betrekking heeft, geheel buiten het toegestane gebied. Dus in de gegeven omstandigheden kunnen er nooit zo veel poppenhuizen en treinen gemaakt worden dat er voor de zager 40 uren werk per week is.

De zager kan ook heel aardig verven. Hij doet dat net zo vlot als degene die dat normaal doet. Men besluit dat de zager een aantal uren per week beschikbaar moet zijn om te verven. Dit aantal uren noemen we d . Gedurende die tijd is hij niet beschikbaar voor het zagen.

Als gevolg hiervan veranderen de beperkende voorwaarden I en III in:

$$\text{I} \quad 8x + 5y \leq 800 - 20d \quad \text{en}$$

$$\text{III} \quad 4x + y \leq 240 + 6d.$$

De andere drie voorwaarden blijven hetzelfde.

Het hangt nu van de keuze van d af hoe het toegestane gebied eruit ziet.

- 5p **4** □ Onderzoek of het mogelijk is d zodanig te kiezen dat het toegestane gebied uitsluitend begrensd wordt door de lijnen $x = 0$, $y = 0$ en de grenslijn die betrekking heeft op het timmeren. Gebruik zo nodig de figuur op de bijlage.

Keno

In de Verenigde Staten kun je op veel plaatsen het kansspel Keno spelen. De spelregels en de te winnen prijzen zijn niet overal precies hetzelfde. We kijken in deze opgave naar één bepaalde vorm waarin het spel gespeeld kan worden.

Een lot kost 1 dollar. Op het lot staan de getallen 1 tot en met 80. Om mee te spelen moet je 10 van deze 80 getallen aankruisen. Dat kan op verschillende manieren. In figuur 2 zie je daar een voorbeeld van.

figuur 2

Select your own numbers

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

4p **5** □ Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om 10 verschillende getallen op het lot te kiezen.

Bij de trekking worden door een trekkingsmachine willekeurig 22 getallen gekozen uit de getallen 1 tot en met 80. Nu gaat het erom, hoeveel van de 10 aangekruiste getallen goed zijn. Dat wil zeggen, hoeveel er bij de 22 getallen uit de trekkingsmachine zitten. Dit aantal bepaalt de prijs die je wint. Het prijzenschema ziet er als volgt uit.

tabel 2

aantal getallen goed	prijs
10	\$ 250.000,-
9	\$ 2.500,-
8	\$ 250,-
7	\$ 25,-
6	\$ 7,-
5	gratis lot
4	gratis lot
3	geen prijs
2	geen prijs
1	gratis lot
0	\$ 5,-

Opvallend is dat je bij 0 goed een prijs wint en bij 2 of 3 goed niet. Hiervoor is gekozen omdat bijvoorbeeld de kans dat 2 getallen goed zijn veel groter is dan de kans dat 0 getallen goed zijn.

- 6p **6** Bereken de kans dat 0 getallen goed zijn en bereken ook de kans dat 2 getallen goed zijn.

Stel dat je één lot koopt. De kans dat je direct een geldprijs wint, is dan ongeveer 5,4% en de kans op een gratis lot ongeveer 39,5%. De kans dat je met dat gratis lot bij de volgende trekking een geldprijs wint, is weer 5,4% en de kans dat je opnieuw een gratis lot wint, is weer 39,5%, enzovoorts.

- 6p **7** Bereken de kans dat je zo bij een van de eerste tien trekkingen een geldprijs wint.

De maker van een website over dit spel verzamelt al sinds de introductie van dit spel de resultaten van alle trekkingen. Hij houdt ook voortdurend bij hoe vaak elk van de 80 getallen getrokken is in alle trekkingen tot dan toe. Op basis daarvan publiceerde hij op een bepaald moment tabel 3. Uit deze tabel blijkt bijvoorbeeld dat tot dat moment 11 van de 80 getallen ten minste 290 keer en ten hoogste 299 keer waren getrokken.

tabel 3

aantal keren getrokken	aantal getallen
260 – 269	2
270 – 279	1
280 – 289	4
290 – 299	11
300 – 309	21
310 – 319	21
320 – 329	15
330 – 339	3
340 – 349	0
350 – 359	2

Tabel 3 heeft betrekking op een groot aantal trekkingen van telkens 22 getallen. Met behulp van de gegevens in de tabel kunnen we een schatting maken van dit aantal trekkingen. De maker van de website beweerde dat tabel 3 betrekking had op 1126 trekkingen.

- 5p **8** Onderzoek of deze bewering in overeenstemming kan zijn met de gegevens in tabel 3.

Ransuilen in Vaes

In 1977 troffen onderzoekers in Vaes een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet bestudeerd. Daaruit bleek onder andere dat de ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen half juni al kunnen vliegen. Uit tellingen, die steeds eind juni plaatsvonden, bleek dat de populatie in omvang toenam. In tabel 4 staan enige resultaten.

tabel 4

Aantal ransuilen per eind juni

jaar	1977	1989
aantal	20	178

Neem aan dat tussen eind juni 1977 en eind juni 1989 het aantal ransuilen jaarlijks met een vast percentage toenam.

4p **9** □ Bereken met hoeveel procent per jaar het aantal ransuilen in deze periode toenam.

Eind juni 1991 telde men 205 ransuilen. Dat is minder dan volgens de bovenstaande groei verwacht mocht worden. Dit zou verklaard kunnen worden door het feit dat door ransuilen gebruikte broedplaatsen (bestaande holtes in bomen en gebouwen) altijd slechts in beperkte mate aanwezig zijn. Daardoor konden sommige vrouwtjes dat jaar geen broedplaats vinden.

Aanvankelijk dacht een onderzoeker het aantal ransuilen vanaf 1989 goed te kunnen voorspellen met een model van de vorm:

$$R(t) = a - b \cdot 0,6^t$$

Hierbij is $R(t)$ het aantal ransuilen in jaar t en t het aantal jaren na eind juni 1989.

Hij koos a en b zo dat de formule 178 ransuilen opleverde voor 1989 ($t = 0$) en 205 ransuilen voor 1991 ($t = 2$). Zo vond hij voor a de waarde 220,2 en voor b de waarde 42,2.

6p **10** □ Bereken de waarden van a en b afgerond op twee decimalen.

We gebruiken verder in deze opgave de formule:

$$R(t) = 220,2 - 42,2 \cdot 0,6^t$$

Met deze formule kwam de onderzoeker voor eind juni 1993 uit op (afgerond) 215 ransuilen. Deze voorspelling kwam echter niet uit. Eind juni 1993 bleken er 223 ransuilen te zijn in plaats van de voorspelde 215. Daarom stelde de onderzoeker een nieuw model op dat overeenstemde met de aantallen ransuilen van 1989, 1991 en 1993:

$$Q(t) = \frac{250}{1 + 0,4045 \cdot 0,74^t}$$

Hierbij is $Q(t)$ het aantal ransuilen in jaar t en t het aantal jaren na eind juni 1989.

Hoewel dit laatste model aanvankelijk beter overeenstemt met de waarnemingen dan het eerste model, is het mogelijk dat op den duur het eerste model realistischer is. We vergelijken daarom deze twee modellen.

Zowel $R(t)$ als $Q(t)$ geven voor 1989 ($t = 0$) het aantal van 178 ransuilen.

In de jaren daarna is soms $R(t)$ groter dan $Q(t)$ en soms $Q(t)$ groter dan $R(t)$.

4p **11** □ Toon dit aan door de grafieken van R en Q te schetsen voor $0 \leq t \leq 5$.

Bij het eerste model is na 1989 steeds sprake van afnemende stijging. We willen weten of dat bij het tweede model ook zo is.

Hoewel $Q(t)$ alleen voor gehele waarden van t zinvolle voorspellingen van het aantal ransuilen geeft, kunnen we $Q(t)$ toch voor niet-gehele waarden van t berekenen.

Met behulp van differentiëren is het dan mogelijk de stijging van $Q(t)$ te onderzoeken.

4p **12** Differentieer $Q(t)$.

3p **13** Onderzoek of bij $Q(t)$ in de periode tussen 1989 en 2000 steeds sprake is van afnemende stijging. Maak voor dit onderzoek in de figuur op de bijlage een grafiek van de afgeleide functie van Q .

Omdat de tellingen slechts een keer per jaar plaatsvinden, is een discreet model geschikter.

In plaats van bovenstaande formule voor $Q(t)$ had de onderzoeker voor het tweede model ook een recursieve formule kunnen maken van de volgende vorm:

$$N_{t+1} = c \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{d}\right) + N_t \text{ met } N_0 = 178$$

Hierbij is t het aantal jaren na eind juni 1989.

In deze formule kunnen de constante getallen c en d zo gekozen worden dat de waarden van N_t volgens deze formule bij benadering hetzelfde zijn als de waarden van $Q(t)$.

Zowel bij de formule voor $Q(t)$ als bij de recursieve formule nadert het aantal ransuilen op den duur tot eenzelfde evenwichtswaarde.

5p **14** Bereken d met behulp van deze evenwichtswaarde.

Alcohol

Alcohol beïnvloedt de rijvaardigheid. De politie houdt regelmatig alcoholcontroles om automobilisten met een te hoog alcoholpromillage in hun bloed te kunnen bestraffen.

Enkele jaren geleden meende Veilig Verkeer Nederland (tegenwoordig heet deze organisatie 3VO) dat er aan de alcoholcontroles nog wel wat verbeterd zou kunnen worden. Zie artikel 1.

artikel 1

VVN: dronken automobilisten ontspringen te vaak de dans

HUIZEN • Veilig Verkeer Nederland (VVN) stoort zich aan de manier waarop de politie omspringt met automobilisten die te veel gedronken hebben. Volgens de organisatie wordt 35 procent van de bestuurders die te veel hebben gedronken niet bestraft omdat de controleapparatuur van de politie te ruim staat afgesteld.

...

Met meer dan 0,5 promille alcohol in het bloed is een automobilist wettelijk strafbaar. Volgens VVN staat de apparatuur van de politie al jaren

afgesteld op 0,7 promille waardoor veel bestuurders-in-overtreding niet tegen de lamp lopen.

Een woordvoerder van de politie erkent dat deze marge is ingebouwd om onnauwkeurigheden in de apparatuur te ondervangen. Daarmee wordt voorkomen dat mensen worden vervolgd, terwijl later het wettelijk bewijs niet kan worden geleverd. „Dat is gebeurd op last van Justitie”, zegt hij.

Bij een alcoholcontrole werd 1,45% van de gecontroleerde automobilisten bestraft. Neem aan dat het percentage van 35 in de eerste alinea van het artikel juist is. Als *alle* automobilisten die te veel hadden gedronken, waren bestraft dan zou het percentage niet 1,45 zijn geweest, maar hoger.

4p **15** □ Bereken dat hogere percentage.

In artikel 1 speelt de onnauwkeurigheid van de apparatuur een belangrijke rol: de metingen geven bijna nooit de werkelijke waarde van het promillage alcohol dat in het bloed aanwezig is. Het verschil tussen het gemeten promillage en het werkelijke promillage noemen we de *meetfout*.

We gaan er in deze opgave van uit dat de meetfouten normaal verdeeld zijn, met een gemiddelde van 0 promille. Afwijkingen naar boven en afwijkingen naar beneden zijn dus even waarschijnlijk. Neem aan dat de standaardafwijking van de meetfouten 0,1 promille is.

Een automobilist met 0,48 promille alcohol in het bloed is wettelijk niet strafbaar. Stel dat deze automobilist wordt gecontroleerd. Als de meting meer dan 0,7 promille aangeeft, dan wordt deze automobilist (ten onrechte) bestraft.

5p **16** □ Bereken de kans dat de meetfout zo groot is dat deze automobilist (ten onrechte) wordt bestraft.

Toen de grens in de apparatuur op 0,7 promille werd gesteld, was de apparatuur nog zo onnauwkeurig dat een ruime marge noodzakelijk was: er zouden anders te veel mensen ten onrechte bestraft worden. Volgens een woordvoerder van 3VO is nauwkeurigheid tegenwoordig geen probleem meer. Kennelijk is de standaardafwijking van de meetfouten bij de huidige apparatuur kleiner geworden.

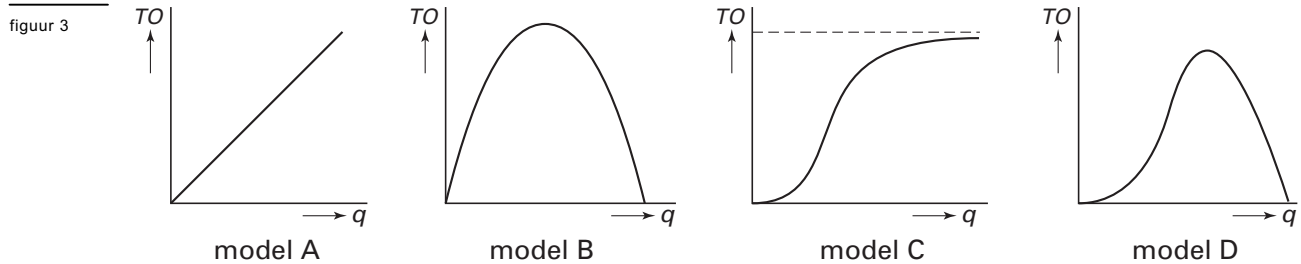
Neem aan dat de standaardafwijking van de meetfouten tegenwoordig 0,02 promille is. Justitie wil de grens waarop de apparatuur wordt afgesteld zo kiezen dat van de gecontroleerde automobilisten met 0,5 promille alcohol in het bloed slechts 1% (ten onrechte) bestraft wordt.

5p **17** □ Bereken in twee decimalen nauwkeurig boven welk gemeten promillage automobilisten dan bestraft worden.

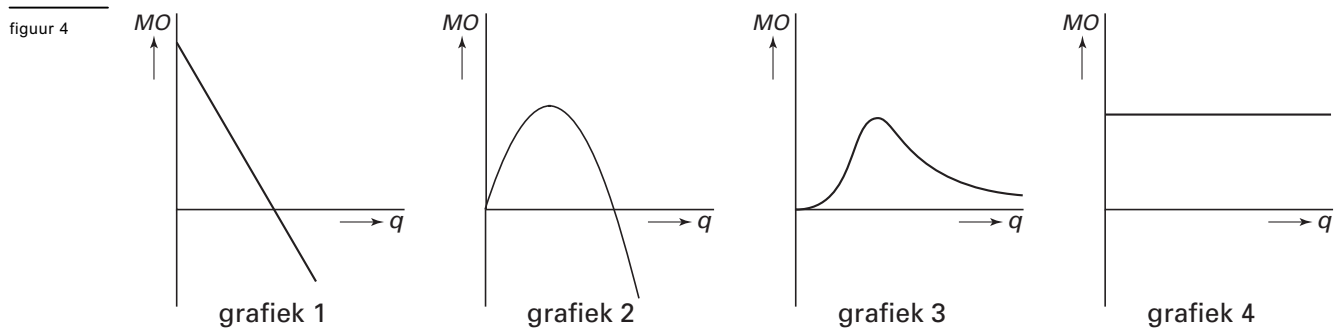
Opbrengstmodellen

In de economie wordt vaak gebruik gemaakt van wiskundige modellen. Daarin komen formules voor die een theoretisch verband beschrijven tussen economische grootheden.

Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst is TO . In figuur 3 staat voor vier verschillende economische modellen een schets van de grafiek van TO .



Als we willen weten hoe de totale opbrengst verandert bij een kleine toename van q , dan kijken we naar de marginale opbrengst MO . In figuur 4 zie je bij elk van de modellen uit figuur 3 de grafiek van de marginale opbrengst, maar ze staan niet in de juiste volgorde.



- 4p **18** □ Geef voor elk van de grafieken 1, 2, 3 en 4 uit figuur 4 aan bij welk model uit figuur 3 deze hoort. Licht je antwoord toe.

We gaan model D uit figuur 3 verder bekijken.

Stel dat voor het verband tussen q en TO een formule van de volgende vorm geldt:

$$TO = -0,01 \cdot q^3 + b \cdot q^2 \text{ met } b \text{ een positief getal.}$$

Bij elke waarde van b kan het maximum van TO worden berekend. De waarde van q waarbij dit maximum optreedt, hangt af van b . Deze waarde van q noemen we q_{\max} .

- 5p **19** □ Teken in de figuur op de bijlage een grafiek van het verband tussen q_{\max} en b . Licht je werkwijze toe.

Einde