

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 22 vragen.

**Attentie!**

Voor de vragen 14 tot en met 22 moet je de computer gebruiken. Schrijf de antwoorden op deze vragen op papier, tenzij anders is aangegeven.

Indien gevraagd wordt resultaten op te slaan, doe je dat in de examenmap.

In het openingsscherm is de naam van deze map gegeven.

Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Voor de uitwerking van de vragen 2 en 21 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

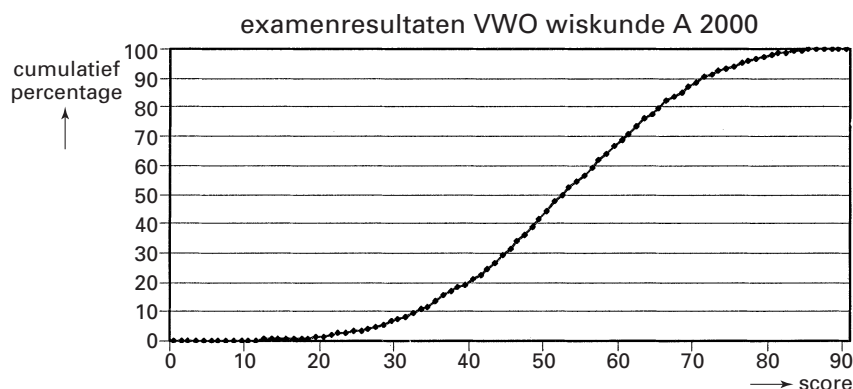
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Examenresultaten

Voor de invoering van de tweede fase bestonden de vakken wiskunde A en wiskunde B. In 2000 werden deze vakken voor het laatst op alle VWO-scholen geëxamineerd. Bij het Centraal Examen wiskunde A was de maximale score 90 punten. Zoals bij elk examen werden de behaalde resultaten onderzocht door middel van een grote landelijke steekproef. Van de 2255 kandidaten in de steekproef was er één met 0 punten en één met 88 punten. Niemand behaalde meer dan 88 punten. De uitkomst van de steekproef is in de vorm van een cumulatieve frequentiepolygoon weergegeven in figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Uit figuur 1 blijkt bijvoorbeeld dat 29% van de kandidaten een score van 45 punten of minder behaalde.

- 3p 1  Bereken met behulp van figuur 1 hoeveel kandidaten een score hadden die hoger was dan 65.

De uitkomst van de steekproef zou ook in de vorm van een boxplot weergegeven kunnen worden.

- 5p 2  Maak zo'n boxplot met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

De gemiddelde score in deze steekproef was 52,5 punten, met een standaardafwijking van 14,7 punten.

Vóór de tweede fase kwam het vrij vaak voor dat iemand zowel in wiskunde A als in wiskunde B examen deed. In deze steekproef gold dat voor 546 kandidaten. We noemen deze groep voor het gemak de A&B-groep. De scores voor wiskunde A van deze A&B-groep waren bij benadering normaal verdeeld, met een gemiddelde van 63,8 punten.

De leerlingen in de A&B-groep verschillen in aanleg voor wiskunde minder van elkaar dan de leerlingen in de hele steekproef. Daarom is het waarschijnlijk dat hun scores een kleinere spreiding vertonen.

Van de 546 kandidaten in de A&B-groep haalde 6% een onvoldoende, namelijk een score van 44 punten of minder voor wiskunde A. Voor de score  $X$  geldt dus:  $P(X \leq 44,5) = 0,06$ .

- 5p 3  Onderzoek of hieruit volgt dat de standaardafwijking van de scores van de A&B-groep kleiner is dan die van de hele steekproef.

Een docent bekijkt deze cijfers en is er helemaal niet van overtuigd dat de A&B-leerlingen het zoveel beter deden dan alle A-leerlingen. Volgens hem is dat geringe aantal van 33 onvoldoendes veroorzaakt door de kleine steekproef van 546 kandidaten. Hij beweert dat de A&B-leerlingen het net zo goed deden als alle A-leerlingen.

Ga bij de volgende vraag ervan uit dat 29% van alle wiskunde A-leerlingen een onvoldoende scoorde voor het examen.

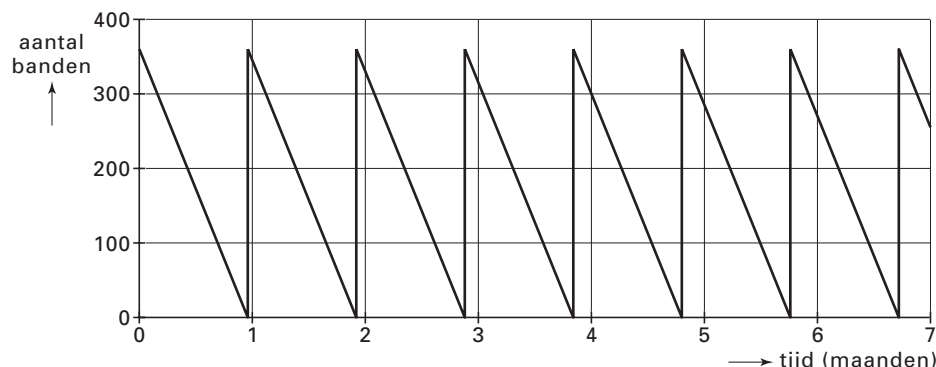
- 6p 4  Onderzoek of de bewering van de docent door de gegevens bevestigd wordt. Gebruik daarbij een significantieniveau van 5%.

## Autobanden

De firma Nedtyre verkoopt een speciaal type autobanden aan garages, bandenspecialisten en autospecialisten. Jaarlijks verkoopt Nedtyre 4500 banden van dit type.

Nedtyre koopt deze banden in bij de Italiaanse bandenfabriek Carrelli. Om de voorraad op peil te houden doet Nedtyre steeds bestellingen van 360 banden. We nemen aan dat de verkoop gelijkmatig over het jaar verdeeld is. Men zorgt ervoor dat de nieuwe bestelling telkens precies arriveert op het moment dat er geen banden meer in voorraad zijn. Dan zit er telkens 0,08 jaar, dus iets minder dan een maand, tussen twee opeenvolgende bestellingen. De voorraad autobanden verloopt volgens de grafiek in figuur 2.

figuur 2



De voorraadkosten zijn evenredig met het aantal banden dat in voorraad is. De kosten om een band een jaar lang in voorraad te houden bedragen € 180.

- 3p **5** □ Toon aan dat de totale voorraadkosten volgens dit model € 32 400 per jaar bedragen.

De banden worden door Nedtyre voor € 70 per stuk verkocht. De inkoopprijs die Nedtyre betaalt, is € 30 per band. Bij het berekenen van de winst moet ook rekening worden gehouden met bovengenoemde voorraadkosten en met de leveringskosten. Deze leveringskosten bedragen € 3500 per bestelling.

- 3p **6** □ Laat met een berekening zien dat uit het voorgaande volgt dat Nedtyre gemiddeld per band een winst van ongeveer € 23,08 maakt. Je mag hierbij geen gebruik maken van de formule die later in deze opgave vermeld wordt.

De leveringskosten van € 3500 gelden voor elke bestelling, ongeacht het aantal bestelde banden. Ook het jaarlijks verkochte aantal van 4500 banden blijft voortdurend gelijk. Nedtyre wil nu onderzoeken of de gemiddelde winst per band verhoogd kan worden door in plaats van 360 banden een ander aantal banden per keer te bestellen. Hierdoor zouden de totale kosten af kunnen nemen. Men maakt de volgende formule:

$$W = 40 - \frac{3500}{x} - 0,02x$$

Hierin is  $W$  de gemiddelde winst per band in euro's en  $x$  de bestelgrootte (het aantal banden dat telkens wordt besteld).

- 5p **7** □ Toon aan dat deze formule voor iedere bestelgrootte  $x$  juist is.

Nedtyre wil zo veel mogelijk winst per band maken.

- 5p **8** □ Stel de afgeleide van  $W$  op en bereken met behulp daarvan bij welke bestelgrootte  $x$  de gemiddelde winst per band maximaal is.

## Vierkeuzevragen

Bij vierkeuzevragen staan bij elke vraag vier mogelijke antwoorden:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ . Slechts één daarvan is juist. Een kandidaat kan één van de vier antwoorden kiezen of de vraag onbeantwoord laten. Bij keuze van het juiste antwoord wordt 1 punt toegekend, in alle andere gevallen 0 punten. Als een kandidaat absoluut niet weet welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn, doet hij er daarom verstandig aan om toch een antwoord te kiezen. Dit leidt tot gokgedrag.

Daarom is ook wel eens geopperd om bij een onjuist antwoord strafpunten te geven. Een kandidaat heeft dan twee keuzes: niets invullen levert 0 punten op; wel iets invullen levert 1 punt op bij een juist antwoord en  $-0,5$  punt ( $0,5$  strafpunt) bij een onjuist antwoord.

- 3p **9**  Bereken de verwachtingswaarde van de score *per vraag* bij dit strafpuntensysteem als een kandidaat gokt.

### Subjectieve kansen

We kijken nu naar een andere manier van toetsen met vierkeuzevragen. Hierbij hoeft de kandidaat niet meer één antwoord te kiezen. In plaats daarvan vraagt men de kandidaat achter elk van de vier mogelijke antwoorden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  de *subjectieve* kans op te schrijven.

Een kandidaat die bijvoorbeeld noteert  $p_A = 0,2$ ;  $p_B = 0,8$ ;  $p_C = 0$ ;  $p_D = 0$  geeft daarmee aan dat hij er vrij zeker van is dat  $B$  juist is, maar dat  $A$  ook nog zou kunnen, en dat  $C$  en  $D$  volgens hem zeker fout zijn.

De opgeschreven getallen  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$  en  $p_D$  mogen natuurlijk niet negatief zijn en moeten bij elkaar opgeteld 1 zijn.

Bij iedere vraag wordt een *score* berekend die aangeeft 'hoe dicht je bij het juiste antwoord zit'.

Als bijvoorbeeld  $C$  het juiste antwoord is, dan wordt de score berekend met de volgende formule:

$$\text{score} = 1 - (p_A^2 + p_B^2 + (1 - p_C)^2 + p_D^2)$$

Voor de gevallen waarbij  $A$ ,  $B$  of  $D$  het juiste antwoord is, gelden soortgelijke formules. De maximale score is 1 en de minimale score is  $-1$ .

Bij een bepaalde vraag is het juiste antwoord  $B$ . Een kandidaat die niet helemaal zeker van zijn zaak is, noteert bij deze vraag als subjectieve kansen:

$$p_A = 0,2; p_B = 0,7; p_C = 0; p_D = 0,1$$

- 4p **10**  Bereken de score voor deze kandidaat bij deze vraag.

Stel dat bij een andere vraag  $C$  het juiste antwoord is. Een kandidaat haalt bij deze vraag de minimale score.

- 3p **11**  Welke subjectieve kansen kan de kandidaat opgeschreven hebben achter de antwoorden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ ? Vermeld alle mogelijkheden.

Een kandidaat moet een vraag beantwoorden maar heeft geen idee welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn. Er zijn heel veel mogelijkheden voor de kandidaat om die vraag te beantwoorden:

• *Mogelijkheid I:*

De kandidaat zou kunnen gokken op een antwoord door daar 1 achter te schrijven (en dus 0 achter de andere antwoorden). Het antwoord waarbij de kandidaat 1 heeft gezet, kan goed zijn. Dan is de score 1. Als het niet goed is, is de score  $-1$ . De verwachte score is dan:

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -0,50.$$

• *Mogelijkheid II:*

Hij kan ook op twee antwoorden gokken door achter ieder van die twee antwoorden  $\frac{1}{2}$  te schrijven.

• *Mogelijkheid III:*

Hij kan ook op drie antwoorden gokken door achter ieder van die drie antwoorden  $\frac{1}{3}$  te schrijven.

• *Mogelijkheid IV:*

En tenslotte kan hij ook op alle vier de antwoorden gokken door achter alle antwoorden  $\frac{1}{4}$  te schrijven. Deze laatste mogelijkheid levert hem een score van 0,25 op.

Er zijn nog veel meer mogelijkheden om de vraag te beantwoorden. We kijken echter alleen naar de bovengenoemde vier mogelijkheden.

De score bij mogelijkheid IV is hoger dan de verwachte score bij mogelijkheid I.

Mogelijkheid IV is daarmee een ‘verstandiger’ strategie dan mogelijkheid I.

7p **12** □ Onderzoek welk van de mogelijkheden II, III en IV de meest verstandige strategie is.

We vergelijken de antwoorden van twee personen op een vierkeuzevraag.

Tim snapt niets van de vraag en besluit bij ieder antwoord 0,25 in te vullen.

Tom weet zeker dat de antwoorden *B* en *D* onjuist zijn.

Zijn antwoord op deze vraag zal van de vorm zijn:

antwoord	subjectieve kans
<i>A</i>	$a$
<i>B</i>	0
<i>C</i>	$1 - a$
<i>D</i>	0

Hierbij is  $a$  een getal tussen 0 en 1 (eventueel 0 of 1).

Stel dat antwoord *C* juist is. Of Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim hangt af van de gekozen waarde van  $a$ .

4p **13** □ Bereken voor welke waarden van  $a$  geldt dat Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim.

*Dit was de laatste vraag van het schriftelijk gedeelte. Ga verder met de vragen van het computergedeelte.*



*In deze opgave gebruiken we enkele Excelbestanden. Het kan zijn dat de uitkomsten van de berekeningen in de bestanden iets verschillen van de exacte waarden door afrondingen. Verder kunnen in de bestanden soms bepaalde waarden niet precies bereikt worden. In dat geval wordt de dichtstbijzijnde waarde gekozen.*

Neem aan dat je een bedrag belegt in aandelen, waarvan de waarde elke maand met  $\frac{2}{3}\%$  stijgt.

3p 14  Bereken met hoeveel procent de waarde van deze aandelen na één jaar is gestegen.

Stel je hebt maandelijks € 150 vrij te besteden. Je overweegt dat bedrag telkens in aandelen te beleggen. Dan zie je een advertentie van KoersSprint. “Dat is aantrekkelijk! Bij KoersSprint kun je aandelen kopen met geleend geld waarover je rente betaalt. Door gebruik te maken van de waardestijging van het aandelenpakket kun je dan behoorlijk veel winst maken.”

Hieronder zie je de advertentie.

advertentie



### **Met KoersSprint laat u het peloton achter u Doe mee voor slechts € 150 per maand**

Het mooie van KoersSprint is dat u niet over een eigen kapitaal hoeft te beschikken. Zodra u besluit mee te doen, schieten wij u een bedrag van € 22 500 voor. Dit bedrag beleggen wij direct voor u in solide aandelen.

U betaalt slechts € 150 per maand als vergoeding (rente) voor het voorgesloten bedrag.

U hebt direct het plezier van de mogelijke waardestijging van het totale pakket. Zo kan uw geld veel sneller groeien dan wanneer u maandelijks € 150 zou beleggen.

Na 5 jaar wordt de waarde van de belegging uitgekeerd, verminderd met het door ons voorgesloten bedrag.

De uitkering na 5 jaar is hoger naarmate de aandelen meer in waarde zijn gestegen. Wanneer bijvoorbeeld de waarde van de aandelen jaarlijks met 12% stijgt, ontvangt u na vijf jaar € 17 153.

Meer rekenvoorbeelden vindt u op onze website.

De vraag is natuurlijk waarvoor je moet kiezen:

- voor beleggen via KoersSprint en elke maand € 150 betalen of
- voor zelf elke maand € 150 beleggen.

Het vervolg van deze opgave gaat over die keuze.

In het Excelbestand KOERSSPRINT-1.XLS is een deel van de in de advertentie genoemde website nagebouwd.



*Open het Excelbestand KOERSSPRINT-1.XLS.*

*In dit bestand mag je alleen de schuifbalk gebruiken, dus niets invullen!*

Bij de rekenvoorbeelden in de advertentie en op de website gaat men ervan uit dat de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen jaarlijks met een vast percentage stijgt. Er is dan dus sprake van exponentiële groei.

In het bestand kun je met de schuifbalk instellen hoeveel procent de waarde van de aandelen jaarlijks stijgt. De uitkering na vijf jaar wordt dan uitgerekend.

Het ingestelde percentage noemen we  $p$ . De uitkering na 5 jaar noemen we  $u$ . Zoals in de advertentie staat, wordt bij het percentage  $p = 12$  de uitkering  $u = € 17\,153$ .

- 3p **15**  Stel een formule op waarmee bij elk percentage  $p$  de uitkering  $u$  te berekenen is.

Wie aan KoersSprint deelneemt, betaalt aan rente 60 keer € 150, dus in totaal € 9000.

Het kan zijn dat het percentage  $p$  zo laag is, dat de uitkering  $u$  lager is dan deze € 9000.

- 3p **16**  Onderzoek voor welke gehele waarden van  $p$  dit geldt.



Sluit het Excelbestand KOERSSPRINT-1.XLS en open het Excelbestand KOERSSPRINT-2.XLS.

Ook in dit bestand mag je alleen de schuifbalken gebruiken, dus niets invullen!

In KOERSSPRINT-2.XLS kun je net als in KOERSSPRINT-1.XLS het percentage  $p$  instellen waarmee de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen jaarlijks stijgt. Je ziet dan weer de uitkering van KoersSprint na 5 jaar.

Via KoersSprint beleggen betekent dat de deelnemer aan het eind van iedere maand € 150 rente aan KoersSprint betaalt. Die € 150 zou hij aan het eind van iedere maand ook zelf in aandelen kunnen beleggen. Om te berekenen wat het resultaat bij deze manier van beleggen is, hebben we het percentage waardeverhoging *per maand* nodig.

In KOERSSPRINT-2.XLS kun je daarom ook instellen hoeveel procent *per maand* de waarde van aandelen toeneemt bij zelf beleggen. Dit percentage noemen we  $m$ . Verder wordt in het bestand ook vermeld hoeveel procent per jaar overeenkomt met  $m\%$  per maand. Dit komt later bij de jaarrendementbepaling verder aan de orde. Merk op dat dit percentage *niet*  $12 \cdot m$  is.

Verder zie je het eindbedrag bij zelf beleggen. Dit wordt overgenomen uit de afgebeelde tabel. Wanneer je een waarde van  $m$  via de schuifbalk instelt, dan zie je in de tabel de ontwikkeling van het bedrag bij zelf beleggen. De vermelde bedragen  $B(n)$  zijn telkens aan het eind van maand  $n$ , nadat de waardeverhoging van de afgelopen maand is bijgeteld en zojuist weer € 150 is belegd. Na 1 maand is juist de eerste € 150 belegd, maar is nog geen sprake van waardeverhoging. Na 60 maanden is juist de laatste € 150 belegd en staat er het eindbedrag.

De termen van de rij  $B(n)$  kunnen berekend worden met de lineaire recursievergelijking  $B(n) = (1 + 0,01m) \cdot B(n - 1) + 150$  met  $B(0) = 0$ . Maar de termen van de rij kunnen ook worden berekend met een directe formule (rangnummerformule).

Er geldt  $B(1) = 150$  en voor  $m = 1$  wordt de lineaire recursievergelijking  $B(n) = 1,01 \cdot B(n - 1) + 150$ .

- 5p **17**  Laat zien dat voor  $m = 1$  de directe formule voor  $B(n)$  gelijk is aan  $B(n) = 15\,000 \cdot (1,01^n - 1)$  en laat met behulp van deze formule zien dat het eindbedrag dat in KOERSSPRINT-2.XLS berekend wordt voor  $m = 1$  klopt.

Wanneer iemand aan het eind van elke maand zelf € 150 in aandelen belegt, is het

eindbedrag na 5 jaar te vinden met de formule:  $Eindbedrag = 150 \cdot \frac{(1 + 0,01m)^{60} - 1}{0,01m}$ .

Hierin is  $m$  het percentage van de waardeverhoging van de aandelen per maand.

Neem aan dat de waarde van de bij KoersSprint gekochte aandelen stijgt met 9,6% per jaar.

- 4p **18**  Benader met behulp van deze formule in vier decimalen nauwkeurig wat de waarde van  $m$  moet zijn om bij zelf beleggen een even groot eindbedrag te krijgen. Gebruik daarbij de grafische rekenmachine.

### Jaarrendement

In KOERSSPRINT-1.XLS wordt het jaarrendement vermeld. Bij elke waarde van  $p$  hoort een jaarrendement. Zo is voor  $p = 12$  bij een uitkering van € 17 153 na 5 jaar het jaarrendement 26,94%. (Je kunt dit controleren door het bestand even te openen en daarna weer te sluiten.) Dit percentage geeft aan wat de jaarlijkse waardeinstijging van de aandelen bij zelf beleggen zou moeten zijn om dezelfde opbrengst op te leveren als via beleggen bij KoersSprint.

Dat bij  $p = 12$  het jaarrendement 26,94% is, betekent dus dat de waarde van de aandelen *bij zelf beleggen* met 26,94% per jaar zou moeten stijgen om ervoor te zorgen dat de waarde ervan na 5 jaar even groot (namelijk € 17 153) is als de uitkering bij KoersSprint.

In KOERSSPRINT-2.XLS kun je het jaarrendement bij een waardeinstijging  $p$  niet direct aflezen. Je kunt het vinden door  $m$  zo in te stellen dat na 5 jaar geldt:

eindbedrag bij zelf beleggen = eindbedrag bij KoersSprint.

De jaarlijkse waardeinstijging van de aandelen bij zelf beleggen is dan gelijk aan het jaarrendement.

In het bestand KOERSSPRINT-1.XLS kun je bij elk geheel percentage  $p$  ( $\geq 3$ ) direct het bijbehorende jaarrendement zien. Met het bestand KOERSSPRINT-2.XLS kun je dit jaarrendement ook bepalen bij andere percentages. In KOERSSPRINT-2.XLS kun je  $p$  namelijk nauwkeuriger instellen. Daar is ook in de grafiek te zien of het eindbedrag via beleggen met KoersSprint (rode lijn) ongeveer gelijk is aan het eindbedrag (in blauw) bij zelf beleggen bij een in te stellen waardeinstijgingspercentage per maand  $m$ . Om het jaarrendement preciezer te kunnen bestuderen, gebruiken we daarom het Excelbestand KOERSSPRINT-2.XLS.

- 3p **19**  Neem aan dat de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen stijgt met 7,2% per jaar. Onderzoek met behulp van bestand KOERSSPRINT-2.XLS wat het jaarrendement is. Licht je werkwijze toe.

Zoals je al eerder hebt gezien, kan het voorkomen dat de uitkering van KoersSprint lager is dan het totaal van de maandelijks betaalde bedragen. Er is dan sprake van een negatief jaarrendement. Daarom kun je in het bestand voor  $m$  ook negatieve waarden instellen.

- 3p **20**  Geef een voorbeeld van getallen  $p$  en  $m$  waarbij de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen nog wel stijgt ( $p > 0$ ) maar het jaarrendement toch negatief is.

De afgelopen jaren daalden de aandelenkoersen en ontstonden er grote problemen bij bezitters van aandelen. Zo ook bij de deelnemers aan KoersSprint. Met het oog hierop kun je in het bestand ook voor  $p$  negatieve waarden instellen. Dan krijgen de deelnemers na 5 jaar helemaal niets uitgekeerd, maar hebben ze zelfs nog een schuld bij KoersSprint.

We kijken nu naar het effect van de KoersSprint-constructie. We letten op het verschil tussen zelf beleggen en deelname aan KoersSprint, waarbij de jaarlijkse waardeinstijging of waardedaling van de aandelen in beide gevallen hetzelfde is. We kunnen dan verschillende gevallen onderscheiden. Zie tabel 1.

tabel 1

	jaarlijkse waarde- stijging $p$ van de aandelen (in %)	uitkering KoersSprint (in €)	eindbedrag bij zelf beleggen (in €)
KoersSprint keert niets uit en de deelnemer heeft een schuld aan KoersSprint	$p$ kleiner dan 0	kleiner dan 0	kleiner dan 9000
KoersSprint keert niets uit, maar er is ook geen schuld	$p = 0$		
KoersSprint keert nog wel wat uit, maar minder dan de deelnemer in totaal betaald heeft			
KoersSprint keert meer uit dan de deelnemer in totaal betaald heeft, maar minder dan het eindbedrag bij zelf beleggen			
KoersSprint keert meer uit dan het eindbedrag bij zelf beleggen			

Deze tabel staat ook op de uitwerkbijlage.

8p **21**  Vul deze tabel op de uitwerkbijlage verder in. Schrijf voor  $p$ , voor de uitkering van KoersSprint en voor het eindbedrag bij zelf beleggen, de waarden op die in een cel van de tabel van toepassing zijn. Doe dat op een manier die overeenkomt met de reeds ingevulde voorbeelden in de tabel. Licht je werkwijze toe.

2p **22**  Voor welke waarden van  $p$  kun je beter zelf beleggen dan deelnemen aan KoersSprint?



*Sluit Excel af. Het bestand KOERSSPRINT-2.XLS niet opslaan.*

**Einde**