

Examen VWO

2008

tijdvak 1
maandag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1,2

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Aandelen

Veel mensen beleggen in aandelen. Daarvoor geven ze een opdracht aan een zogenoemde 'broker'. Die regelt bij een opdracht de aankoop (of de verkoop) van de door de klant gewenste aandelen. Voor het uitvoeren van een opdracht brengt de broker kosten in rekening.

Broker Haag hanteert voor een opdracht een tarief volgens de volgende formule:

$$K = 0,0045 \cdot w + 4$$

Hierbij is K de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop.

De klant moet echter altijd ten minste € 12,- voor een opdracht betalen.

Een klant koopt via Haag 150 aandelen ABN die per stuk € 19,18 kosten. Een tijd later is de waarde van deze aandelen gestegen naar € 21,44 per stuk. De klant neemt het besluit alle aandelen via Haag te verkopen. Voor de berekening van zijn winst houdt de klant rekening met de kosten van aankoop en verkoop.

- 4p 1 Bereken hoeveel winst de klant heeft behaald op de aandelen ABN.

Handelaar Van der Meulen is ook een broker. Hij hanteert als tarief:

$$K = 0,004 \cdot w + 7$$

Hierbij is K weer de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop.

De klant betaalt bij Van der Meulen per opdracht nooit meer dan € 46,-.

Als de totale waarde van de aandelen hoog genoeg is, nemen de kosten die Van der Meulen in rekening brengt, niet verder meer toe.

- 4p 2 Bereken hoe groot de totale waarde van de aandelen dan ten minste moet zijn.

Als een klant een aandelenopdracht wil plaatsen waarvan de totale waarde behoorlijk groot is, kan hij dat beter doen bij Van der Meulen dan bij Haag. Immers, bij Van der Meulen is hij nooit meer kwijt dan € 46,-. In veel andere gevallen is Haag echter goedkoper.

In de figuur op de uitwerkbijlage is een grafiek getekend van het verband tussen de totale waarde van de aandelen en de kosten daarvan bij aankoop bij Van der Meulen.

- 6p 3 Onderzoek bij welke totale aandelenwaarden de klant met zijn opdracht goedkoper uit is bij Haag dan bij Van der Meulen. Gebruik hierbij de figuur op de uitwerkbijlage.

In de zomer van 2004 werd in Portugal het Europese kampioenschap voetballen gehouden, waarbij Griekenland uiteindelijk kampioen werd. Daaraan deden 16 landen mee. Zij waren verdeeld in 4 poules van 4 landen. In elke poule speelde elk land een keer tegen elk ander land van die poule. Na afloop van de poulewedstrijden gingen de beste 2 landen van elke poule door naar de kwartfinale.

In de kwartfinale speelde elk land slechts één wedstrijd tegen een ander land. De landen die wonnen, gingen door naar de halve finale. In de halve finale speelde weer elk land één wedstrijd. De winnaars gingen naar de finale. In de finale werd in één wedstrijd beslist welk land zich kampioen mocht noemen.

- 4p **4** Bereken hoeveel wedstrijden in totaal tijdens het toernooi in Portugal werden gespeeld.

Wat eraan vooraf ging

Om te bepalen welke landen mee mochten doen aan dit toernooi, werden in Europa voorronden gespeeld. De tien winnende landen van deze voorronden plaatsten zich, samen met het gastland Portugal, rechtstreeks voor het toernooi in Portugal.

Van de landen die zich niet rechtstreeks wisten te plaatsen, kregen de volgende landen alsnog de gelegenheid zich te plaatsen voor het toernooi: Kroatië, Letland, Nederland, Noorwegen, Rusland, Schotland, Slovenië, Spanje, Turkije en Wales. Deze tien landen speelden in de zogenoemde '**play-offs**'. Op 14 oktober 2003 was de loting hiervoor: de 'UEFA Euro 2004 play-offs draw'. Het resultaat van deze loting zie je in tabel 1.

tabel 1

Letland – Turkije
Schotland – Nederland
Kroatië – Slovenië
Rusland – Wales
Spanje – Noorwegen

In tabel 1 zie je bijvoorbeeld dat Schotland moest duelleren tegen Nederland. Het duel bestond uit twee wedstrijden: een uitwedstrijd en een thuiswedstrijd. De volgorde was van belang want de loting Schotland – Nederland betekende dat Schotland de eerste wedstrijd thuis, dat wil zeggen: in eigen land, speelde en dat Nederland de tweede wedstrijd thuis speelde.

De loting van deze play-offs had voor Nederland ook een ander resultaat kunnen hebben.

- 3p **5** Bereken hoeveel verschillende lotingen er voor Nederland mogelijk waren.

Na afloop van de loting constateerden 'voetbalkenners' dat telkens een 'sterk' land was geloot tegen een 'zwak' land. Dat vonden sommigen wel erg toevallig en dus kwamen er ingezonden brieven in de krant. Er was echter ook een brief van iemand die de loting helemaal niet zo onwaarschijnlijk vond. Een citaat uit deze brief:

... Een wonderlijke speling van het lot: precies vijf maal een sterke ploeg tegen een zwakke ploeg. Een droomloting. Hoe klein is die kans dat het precies zó uitkomt? Druipt hier niet het bedrog van af? Wel, dat valt wel mee want de kans op zo'n loting is ruim 12%. Die kans van ruim 12% kun je narekenen door je een vaas voor te stellen met vijf zwarte en vijf witte knikkers.

- 4p **6** Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat precies vijf maal een sterk land tegen een zwak land wordt geloot.

Overleven

Verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen gebruiken zogenoemde overlevingstafels. Aan de hand van die overlevingstafels kunnen zij bepalen hoe lang verzekerden en pensioengerechtigden naar verwachting in leven zullen blijven. Een overlevingstafel is een tabel waarin van een groep van 100 000 pasgeborenen staat welk aantal er na x jaar naar verwachting nog in leven is. Dit aantal heet $L(x)$. Tabel 2 hieronder geeft een voorbeeld van een overlevingstafel voor vrouwen in Nederland. In de tabel staat in de laatste kolom het totaal resterend aantal persoonsjaren $T(x)$.

tabel 2

exacte leeftijd x	aantal overlevenden $L(x)$	totaal resterend aantal persoonsjaren $T(x)$
0	100 000	8 045 490
1	99 548	7 945 899
10	99 372	7 050 943
20	99 184	6 058 135
30	98 862	5 067 651
40	98 209	4 081 590
50	96 657	3 111 983
60	92 618	2 159 036

In tabel 2 kun je in de tweede kolom bijvoorbeeld aflezen dat per 100 000 pasgeboren meisjes er naar verwachting nog 98 209 op hun 40e verjaardag in leven zijn. In de derde kolom kun je aflezen dat deze 98 209 vrouwen samen nog 4 081 590 jaar voor de boeg hebben.

Op basis van de gegevens in tabel 2 kun je de kans berekenen dat een vrouw van een bepaalde leeftijd al dan niet een hogere leeftijd bereikt.

- 4p **7** Bereken de kans dat een vrouw die zojuist 30 jaar geworden is, vóór haar 60e verjaardag overlijdt.

De waarde van $T(0)$ in tabel 2 geeft aan dat pasgeboren meisjes gemiddeld bijna 80,5 jaar oud worden.

- 4p **8** Laat met een berekening zien dat vrouwen die hun 50e verjaardag bereiken, volgens de tabel gemiddeld ruim 82 jaar oud worden.

Al in 1825 ontdekte Gompertz dat de waarden van $L(x)$ in een overlevingstafel goed te benaderen zijn met een formule van de vorm:

$$L(x) = 100000 \cdot g^{(c^x - 1)}$$

Hierin worden dan voor g en c geschikte getallen gekozen.

Een verzekeringsmaatschappij gebruikt voor een groep van 100 000 pasgeboren meisjes de formule van Gompertz met $g = 0,999$ en $c = 1,085$. Het aantal vrouwen dat na x jaar nog in leven is, kan dan worden berekend met de formule:

$$L(x) = 100000 \cdot 0,999^{(1,085^x - 1)}$$

In de rest van deze opgave gaan we steeds van deze laatste formule uit.

Met deze formule kunnen we uitrekenen welke leeftijd door maar 50% van de vrouwen wordt gehaald volgens deze verzekeringsmaatschappij.

4p **9** Bereken deze leeftijd.

Gompertz bestudeerde aanvankelijk de zogenoemde **sterfte-intensiteit** in plaats van de functie $L(x)$. Deze sterfte-intensiteit $S(x)$ is als volgt gedefinieerd:

$$S(x) = -\frac{L'(x)}{L(x)}$$

Drie wiskunde-A1,2-leerlingen proberen bij een praktische opdracht over overlevingstafels onder woorden te brengen wat de sterfte-intensiteit voorstelt. Dit doen zij zonder de afgeleide van $L(x)$ te bepalen. Ieder van hen komt met een voorstel:

Johan: "De sterfte-intensiteit $S(x)$ is, bij benadering, het aantal overlevenden per sterfgeval na x jaar."

Fiona: "De sterfte-intensiteit $S(x)$ is, bij benadering, het aantal sterfgevallen per overlevende na x jaar."

Samira: "De sterfte-intensiteit $S(x)$ is, bij benadering, de afname per jaar van het aantal overlevenden na x jaar."

Ze kunnen het niet eens worden. Hun wiskundeleraar geeft aan dat één van de drie voorstellen correct is.

4p **10** Welk van de drie voorstellen is correct? Licht je antwoord toe.

De verzekeringsmaatschappij gebruikt een exponentiële functie voor de sterfte-intensiteit $S(x)$. Om te laten zien dat $S(x)$ inderdaad exponentieel is, moet eerst de afgeleide van $L(x)$ worden bepaald.

4p **11** Toon aan dat voor deze afgeleide geldt: $L'(x) \approx -8,16 \cdot 0,999^{(1,085^x - 1)} \cdot 1,085^x$

Met behulp van de formules van $L(x)$ en $L'(x)$ kunnen we nu een formule opstellen voor $S(x)$. Deze formule is te schrijven in de vorm $S(x) = b \cdot g^x$.

3p **12** Bereken b en g .

Tennisballen

Bij officiële wedstrijden mag een tennisbal niet te groot en ook niet te klein zijn. In de spelregels staat daarover het volgende:

Bij alle proeven ter bepaling van de omvang moet een omvangmeter gebruikt worden. De omvangmeter bestaat uit een metalen plaat. In de plaat zitten twee cirkelvormige openingen met een diameter van respectievelijk 2,575 inch en 2,700 inch. De bal mag niet door zijn eigen gewicht door de kleine opening vallen, maar moet wel door zijn eigen gewicht door de grootste opening vallen.

Een tennisballenfabrikant produceert drie types tennisballen: Yellow, Silver en Gold. Van het type Gold is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,620 inch en een standaardafwijking van 0,048 inch.

De fabrikant krijgt de opdracht 1200 tennisballen van het type Gold te leveren die gebruikt kunnen worden bij officiële wedstrijden.

- 4p **13** Bereken hoeveel tennisballen de fabrikant naar verwachting moet produceren om aan deze opdracht te voldoen.

Bij trainingen is men vaak veel soepeler met het accepteren van tennisballen. Tennisclub Game4u vindt het niet zo erg als trainingsballen niet allemaal voldoen aan de officiële wedstrijdregels. Een partij van dergelijke ballen is vaak goedkoper.

Van het type Silver is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,630 inch en een standaardafwijking van 0,057 inch. Tennisclub Game4u heeft bij de tennisballenfabrikant een groot aantal trainingsballen van het type Silver besteld. Alleen wanneer veel ballen een erg kleine diameter hebben, wordt deze bestelling niet geaccepteerd. Bij Game4u is dat het geval wanneer in een steekproef van 20 tennisballen er meer dan 5 te vinden zijn met een diameter die kleiner is dan 2,55 inch.

- 5p **14** Bereken de kans dat Game4u deze bestelling niet accepteert.

Naast het type Silver wordt ook het type Yellow veel gebruikt voor trainingen. Tennisclub Racket wil een aantal trainingsballen van het type Silver en Yellow kopen bij de fabrikant. Daarvoor heeft Racket wel een aantal voorwaarden geformuleerd:

- het aantal Silver-ballen moet ten minste gelijk zijn aan 200;
- het aantal Yellow-ballen moet ten minste gelijk zijn aan 200;
- in totaal wil Racket ten minste 600 ballen kopen;
- het aantal Silver-ballen mag ten hoogste gelijk zijn aan het dubbele van het aantal Yellow-ballen.

Als we het aantal Silver-ballen aangeven met x en het aantal Yellow-ballen met y , kunnen we in een xy -assenstelsel het toegestane gebied aangeven dat door deze voorwaarden wordt vastgelegd.

Op de uitwerkbijlage zie je drie tekeningen. Daarvan geeft tekening A het juiste gebied aan.

- 4p **15** Leg uit waarom tekeningen B en C niet het toegestane gebied aangeven.

De tennisballenfabrikant heeft een aanbieding voor Racket.

De Silver-ballen kosten 1 euro per stuk.

De Yellow-ballen kosten 1,20 euro per stuk, maar bij een afname van ten minste 300 stuks kosten de Yellow-ballen 1,10 euro per stuk.

Racket wil, uitgaande van de eerdergenoemde voorwaarden en de bovenstaande prijzen, een bestelling bij de fabrikant plaatsen met zo laag mogelijke kosten.

- 6p **16** Onderzoek met behulp van tekening A welke bestelling Racket het beste kan doen.

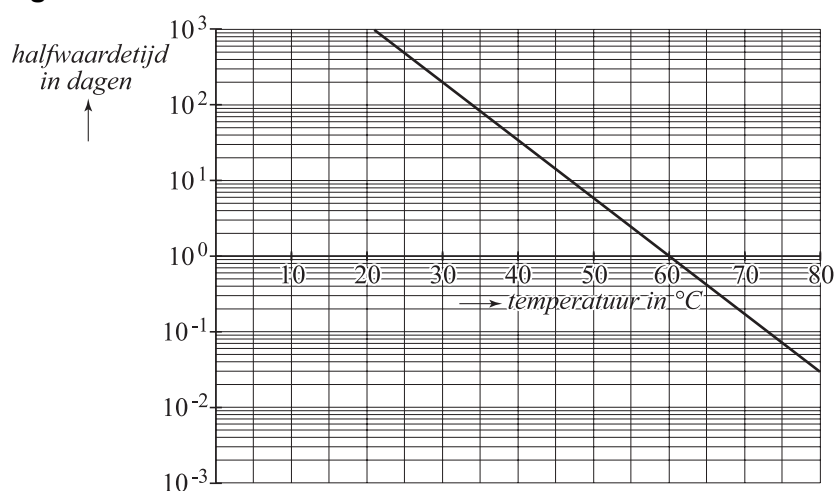
Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym **diastase**: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het **diastase-getal**.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastase-getal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.

Een maat waarmee de afname van het diastase-getal kan worden weergegeven, is de zogeheten **halfwaardetijd**. Dat is de tijd waarin het diastase-getal wordt gehalveerd. In figuur 1 zie je deze halfwaardetijd uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.

figuur 1



- 3p **17** Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van figuur 1.

Het diastase-getal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastase-getal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als **bakkershoning** verkocht worden.

Een bepaald type honing heeft bij winning diastase-getal 28. Deze honing wordt gedurende 3 jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. We gaan ervan uit dat de afname van het diastase-getal exponentieel verloopt.

- 3p **18** Laat met behulp van de grafiek in figuur 1 zien dat deze honing na 3 jaar bakkershoning is geworden.

Soms gaat honing versuikeren. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten.

In figuur 1 zie je dat het diastase-getal gehalveerd wordt als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden.

Een partij honing met diastase-getal 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. We gaan er nog steeds van uit dat de afname van het diastase-getal exponentieel verloopt.

- 5p **19** Bereken hoe lang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

De houdbaarheid van de honing hangt af van het vochtgehalte van de honing. Honing met een laag vochtgehalte is langer houdbaar dan honing met een hoog vochtgehalte. Winkeliers die honing verkopen, hebben daarom liever geen honing met een hoog vochtgehalte.

foto



Een honingimporteur heeft een grote voorraad potten honing. Het vochtgehalte in een pot honing is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 0,5%.

Volgens de importeur is het vochtgehalte in een pot gemiddeld 17,1%.

Een winkelier die regelmatig honing bij de importeur inkoop, heeft geklaagd bij de importeur. Volgens de winkelier is het gemiddelde vochtgehalte hoger dan 17,1%.

De importeur selecteert willekeurig 10 potten honing en laat die onderzoeken.

Uit het onderzoek blijkt dat het vochtgehalte in de 10 potten gemiddeld 17,5% is.

- 6p **20** Onderzoek of het onderzoeksresultaat aanleiding geeft om de winkelier in het gelijk te stellen. Gebruik een significantieniveau van 1%.