

Examen VWO

2009

tijdvak 1
maandag 25 mei
totale examentijd 3 uur

wiskunde A1,2 Complex

Vragen 1 tot en met 9

**In dit deel van het examen staan de vragen
waarbij de computer *niet* wordt gebruikt.**

Bij dit deel van het examen hoort een uitwerkbijlage.

Het gehele examen bestaat uit 17 vragen.

Voor dit deel van het examen zijn maximaal 39 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Nominaal volume

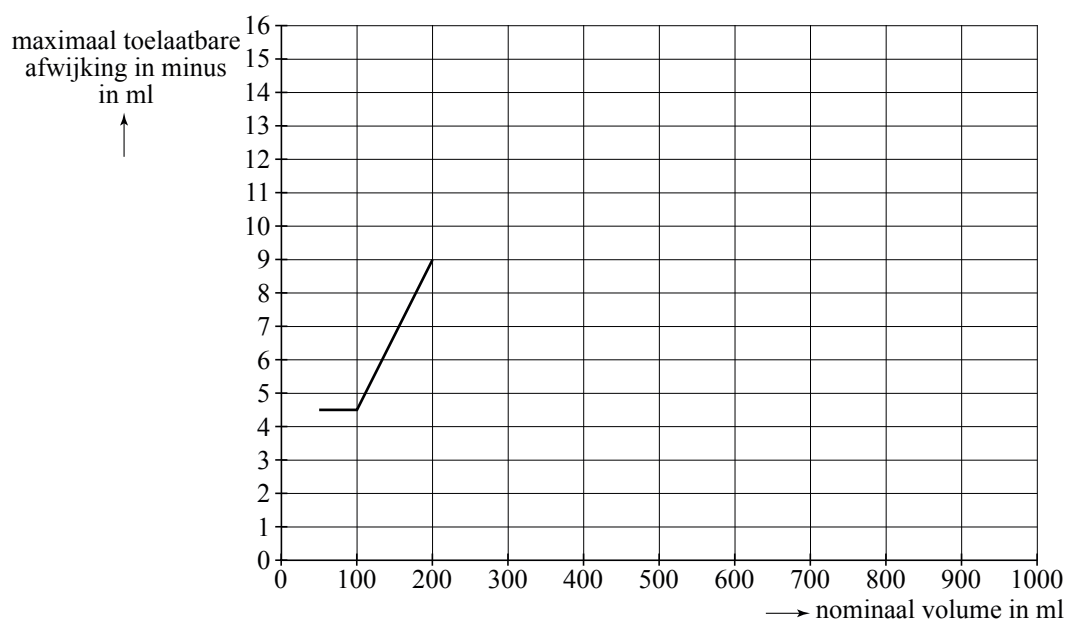
Veel vloeistoffen worden verhandeld in flessen. De hoeveelheid vloeistof die volgens het etiket in de fles moet zitten, heet het **nominaal volume**. Als er bijvoorbeeld "400 ml e" op staat, dan is het nominaal volume 400 ml. Dat betekent niet dat er dan ook altijd precies 400 ml vloeistof in zit. De werkelijke hoeveelheid vloeistof in de fles zou bijvoorbeeld 401,8 ml kunnen zijn of 399,6 ml. Als de werkelijke hoeveelheid vloeistof minder is dan het nominaal volume, dan spreken we van een **afwijking in minus**. De afwijking in minus mag niet te groot zijn. Daar zijn Europese richtlijnen voor. In tabel 1 is voor volumes tussen 50 ml en 1000 ml de maximaal toelaatbare afwijking in minus weergegeven volgens de Europese richtlijn.

tabel 1

nominaal volume in ml	max. toelaatbare afwijking in minus	
	in % van het nominaal volume	in ml
50 tot 100	-	4,5
100 tot 200	4,5	-
200 tot 300	-	9
300 tot 500	3	-
500 tot 1000	-	15

Aan de hand van tabel 1 kan een grafiek worden gemaakt van het verband tussen het nominaal volume en de maximaal toelaatbare afwijking in minus. In figuur 1 is daar al een begin mee gemaakt.

figuur 1



De grafiek in figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

4p 1 Maak de grafiek af op de uitwerkbijlage.

Flessen heten **ondeugdelijk** als de afwijking in minus groter is dan de maximaal toelaatbare afwijking in minus.

Een firma produceert hoestsiroop. Volgens het etiket bevat een fles hoestsiroop 400 ml, dus het nominaal volume is 400 ml. De maximaal toelaatbare afwijking in minus is dan 12 ml.

De werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles is normaal verdeeld met een gemiddelde van 405 ml. Uit onderzoek is gebleken dat per 1000 flessen hoestsiroop gemiddeld 5,2 flessen ondeugdelijk zijn. Met behulp van deze gegevens kan worden berekend dat de standaardafwijking van de werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles ongeveer gelijk is aan 6,6 ml.

- 5p **2** Bereken de standaardafwijking van de werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles in twee decimalen nauwkeurig.

De firma levert een partij van 5000 flessen hoestsiroop aan een apotheek.

- 4p **3** Bereken het verwachte aantal flessen in deze partij dat een afwijking in minus heeft.

Euroverspreiding

Op 1 januari 2002 werd in Nederland en in een aantal andere Europese landen een nieuwe munteenheid ingevoerd, de euro. Elk van deze landen heeft eigen, herkenbare munten; zo staat op de Nederlandse munten het portret van de Nederlandse koningin.

Doordat de euro in meerdere landen wordt gebruikt, raken de munten van een land verspreid over andere landen. In 2002 is door wiskundigen een experiment uitgevoerd om deze verspreiding te onderzoeken. Aan dit experiment deden duizenden mensen in binnen- en buitenland mee, de zogenoemde eurometers. Aan het begin van elke maand werd geteld hoeveel munten uit welk euroland ze in bezit hadden.

De onderzoekers slaagden erin kansen te bepalen dat een Nederlandse munt de grens overgaat: de kans dat een Nederlandse munt die in Nederland is, de volgende maand in het buitenland is, is 0,03. De kans dat een Nederlandse munt die in het buitenland is, daar de volgende maand blijft, is 0,9985. Deze kansen staan ook in tabel 1. We gaan er in deze opgave van uit dat deze kansen elke maand hetzelfde blijven.

tabel 1

	maand t in Nederland	maand t in buitenland
maand $t + 1$ in Nederland	0,97	0,0015
maand $t + 1$ in buitenland	0,03	0,9985

Een Nederlandse munt is op 1 februari 2002 in Nederland. Met behulp van tabel 1 kun je de kans berekenen dat deze munt op 1 mei 2002 in Nederland is, al dan niet na een verblijf in het buitenland.

5p **4** Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Op basis van de kansen in tabel 1 is voor de totale hoeveelheid Nederlandse munten een model te maken dat voor elk tijdstip voorspelt hoeveel van deze munten in Nederland zijn en hoeveel in het buitenland. Dit model bestaat uit twee recurrente betrekkingen¹:

$$N_t = 0,97N_{t-1} + 0,0015B_{t-1} \text{ en } B_t = 0,03N_{t-1} + 0,9985B_{t-1}$$

Hierin is N_t het aantal Nederlandse munten in miljarden dat in maand t in Nederland is; B_t is het aantal Nederlandse munten in miljarden in maand t in het buitenland. Verder is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2002.

Veronderstel dat in totaal 2,8 miljard Nederlandse munten gemaakt zijn, die op 1 januari 2002 allemaal in Nederland waren. Ga ervan uit dat er daarna geen nieuwe munten zijn bijgemaakt. Volgens bovenstaand model zal het aantal Nederlandse munten in Nederland op de lange duur stabiliseren.

- 4p 5 Bereken hoeveel Nederlandse munten er uiteindelijk in Nederland zullen zijn en hoeveel in het buitenland. Geef je antwoord in miljoenen nauwkeurig.

Van alle muntstukken die op zeker moment in Nederland in omloop zijn, is 23,3% Duits. Het vermoeden bestaat dat in de grensstreek met Duitsland het percentage Duitse muntstukken hoger is dan in Nederland als geheel. Om dit vermoeden te onderzoeken, worden van een aantal mensen die in de grensstreek wonen gegevens verzameld over de munten in ieders portemonnee. Er blijken in totaal 512 muntstukken in deze portemonnees te zitten, waarvan er 138 Duits zijn.

- 6p 6 Onderzoek bij een significantieniveau van 5% of er reden is om te veronderstellen dat het vermoeden juist is.

noot 1 Een recurrente betrekking wordt ook wel recursieformule of recursievergelijking genoemd.

Let op: de laatste vragen van dit deel van het examen staan op de volgende pagina.

Emissierechten

Om de uitstoot van kooldioxide (CO₂) onder controle te krijgen verdeelt de overheid elk jaar zogenoemde emissierechten onder bedrijven die CO₂ uitstoten. Eén **emissierecht** betekent dat een bedrijf het recht heeft om in een jaar één ton CO₂ uit te stoten.

Wanneer een bedrijf meer emissierechten heeft dan het aan CO₂ uitstoot, kan het de overgebleven rechten verkopen aan een bedrijf dat nog emissierechten nodig heeft. Deze handel in emissierechten vindt plaats op de Amsterdamse klimaatbeurs ECX.

Aan de hand van een voorbeeld gaan we in de rest van deze opgave na wat de handel in emissierechten voor een bedrijf kan betekenen.

Het bedrijf Fychem stoot per jaar 100 000 ton CO₂ uit en beschikt over slechts 95 000 emissierechten. We onderzoeken de volgende twee mogelijkheden:

- mogelijkheid 1: het bedrijf koopt er 5000 emissierechten bij;
- mogelijkheid 2: het bedrijf neemt maatregelen om de uitstoot tot 90 000 ton CO₂ terug te brengen. Dit kost het bedrijf 60 000 euro. Het bedrijf houdt nu 5000 emissierechten over en verkoopt die op de beurs.

We gaan ervan uit dat de koopprijs en de verkoopprijs van een emissierecht even groot zijn en noemen dat de **prijs** van een emissierecht. Afhankelijk van de prijs van een emissierecht kun je uitrekenen welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem.

Neem aan dat de prijs van een emissierecht gelijk is aan 10 euro.

- 3p 7 Onderzoek welke mogelijkheid voor Fychem het voordeligst is.

De prijs van een emissierecht op de klimaatbeurs varieert. Bij een andere prijs dan 10 euro moet opnieuw bekeken worden welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem. Er is een prijs waarbij het voor Fychem niet uitmaakt welke van de twee genoemde mogelijkheden wordt gekozen.

- 4p 8 Bereken in dat geval de prijs van een emissierecht.

De kosten om de uitstoot van CO₂ te verminderen hangen af van de hoeveelheid waarmee de uitstoot wordt verminderd. Voor Fychem geldt de volgende formule:

$$K(x) = \frac{540x}{100000 - x}$$

In deze formule stelt K de kosten voor in duizenden euro's en x het aantal ton waarmee de CO₂-uitstoot wordt verminderd.

Hoe meer Fychem de uitstoot van CO₂ vermindert, des te meer kosten zal het bedrijf hiervoor moeten maken.

- 4p 9 Beredeneer dit met behulp van differentiëren.

Dit was de laatste vraag van het deel waarbij de computer niet wordt gebruikt.