Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

# Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20**02**

Tijdvak 1
Vrijdag 24 mei
13.30 – 16.30 uur

**Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.**
**Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.**
**Voor de uitwerking van de vragen 8, 12, 17 en 18 is een bijlage toegevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

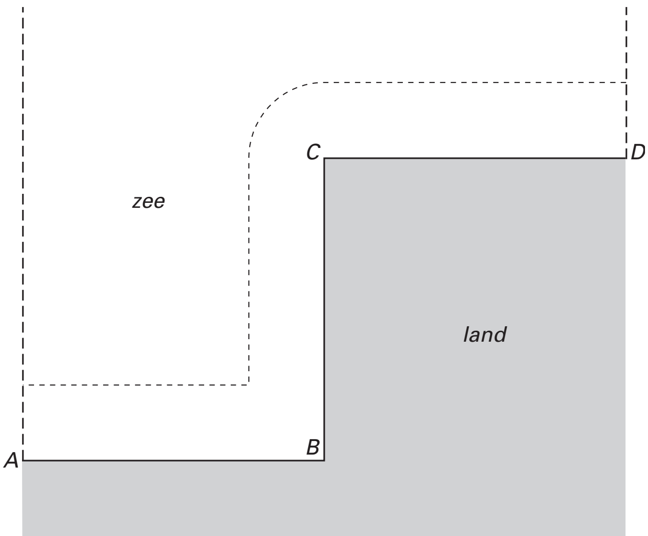


Begin

## Uit de kust

Een kustlijn bestaat uit drie rechte stukken $AB$, $BC$ en $CD$, die hoeken van 90° met elkaar maken. De lengte van elk recht stuk is 4 kilometer. Zie figuur 1.
In de figuur zijn twee stippellijnen getekend die loodrecht staan op $AB$ en $CD$. In deze opgave beperken we ons tot het gebied tussen deze stippellijnen.
De lengte van de isoafstandslijn (in kilometers) tussen de stippellijnen, op een afstand van $x$ kilometer uit de kust, noemen we $L(x)$.

figuur 1




In figuur 1 is een isoafstandslijn getekend, $x$ kilometer uit de kust. De lengte van deze isoafstandslijn wordt gegeven door: $L(x) = 12 - 2x + \frac{1}{2}\pi x$.

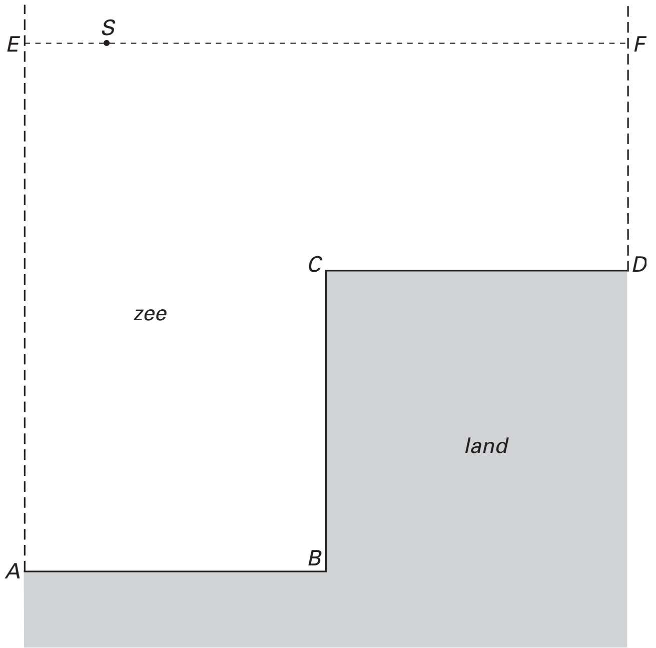
4p **1** ☐ Toon dat aan.

Deze formule geldt alleen voor $x \leq 4$; voor $x > 4$ geldt een andere formule voor $L(x)$. Zonder deze andere formule te kennen, kun je beredeneren tot welke waarde $L(x)$ nadert als $x$ nadert tot oneindig.

4p **2** ☐ Hoe groot is $\lim\limits_{x \to \infty} L(x)$? Licht je antwoord toe.

In figuur 2 liggen de punten $E$ en $F$ op de stippellijnen die loodrecht op $AB$ en $CD$ staan. $EF$ is evenwijdig aan $AB$ en $CD$. De afstand van $EF$ tot $CD$ is 3 kilometer.

figuur 2

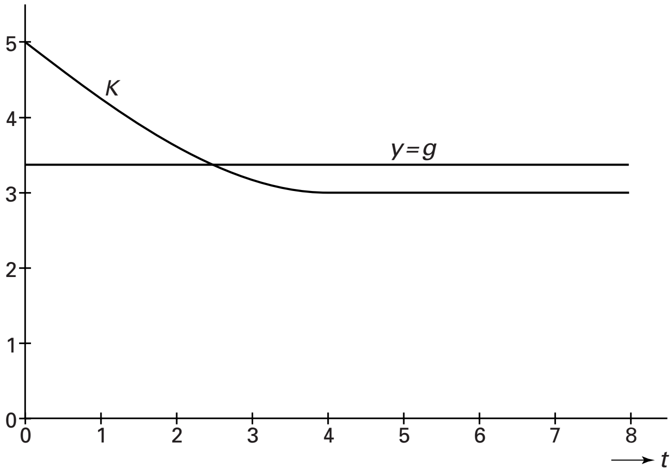



Een speedboot $S$ vaart met een snelheid van 1 km per minuut van $E$ naar $F$. We noemen de afstand (in km) van $S$ tot de kust na $t$ minuten varen: $K(t)$.
Voor $4 \leq t \leq 8$ geldt: $K(t) = 3$.

5p **3** ☐ Toon aan dat voor $0 \leq t \leq 4$ geldt: $K(t) = \sqrt{t^2 - 8t + 25}$ .

In figuur 3 is de grafiek van $K$ getekend voor $0 \leq t \leq 8$. De gemiddelde afstand van $S$ tot de kust noemen we $g$. In figuur 3 is ook de lijn $y = g$ getekend. De oppervlakte onder de grafiek van $K$ is dus gelijk aan de oppervlakte onder de lijn $y = g$ op het interval [0, 8].

figuur 3

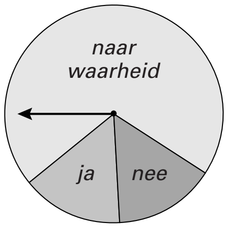



5p **4** ☐ Bereken de waarde van $g$ in twee decimalen nauwkeurig.

## Pestgedrag

Om meer te weten te komen over het pestgedrag op een school wordt er een onderzoek gedaan. Aan elke leerling die aan het onderzoek meedoet, wordt de volgende vraag gesteld: *pest jij wel eens?* Omdat het onderwerp gevoelig ligt, zal niet elke pester naar waarheid willen antwoorden. Daarom laat men de leerlingen antwoorden volgens de methode van *randomized response*. Deze methode werkt als volgt: er wordt gebruik gemaakt van een kansschijf die verdeeld is in de sectoren *ja* (15%), *nee* (15%) en *naar waarheid* (70%). Zie figuur 4.

figuur 4




De leerling laat de wijzer van de kansschijf draaien. De wijzer komt tot stilstand in een willekeurige positie. Als de wijzer tot stilstand komt in de sector *naar waarheid*, moet de leerling eerlijk antwoorden. Als de wijzer in één van de andere sectoren komt, moet de leerling verplicht antwoorden wat die sector aangeeft, ongeacht of hij wel of niet pest.

4p **5** ☐ Bereken de kans dat van 7 leerlingen er 5 naar waarheid moeten antwoorden en 2 verplicht met „ja”. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Leerlingen die het antwoord „ja” geven, doen dat om één van de volgende redenen:

- de wijzer komt in de sector „*ja*” dus antwoorden ze verplicht „ja”

of

- de wijzer komt in de sector „*naar waarheid*” en ze pesten wel eens.

Aan het onderzoek doen 900 leerlingen mee.
Neem bij de volgende vraag aan dat 20% van deze leerlingen wel eens pest.

4p **6** ☐ Toon aan dat dan naar verwachting 261 leerlingen „ja” zullen antwoorden.

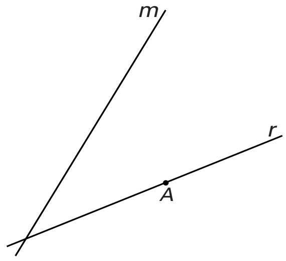
Bij de telling blijkt dat 311 leerlingen de vraag met „ja” hebben beantwoord. Dit doet vermoeden dat het percentage leerlingen dat wel eens pest groter is dan 20%.

5p **7** ☐ Bereken bij welk percentage leerlingen dat wel eens pest het verwachte aantal antwoorden „ja” 311 is.

## Brandpunt en richtlijn zoeken

In figuur 5 is het punt $A$ een punt op de parabool $p$.
De lijn $r$ is de raaklijn aan $p$ in het punt $A$.
De lijn $m$ is de as van $p$.
De figuur staat ook op de bijlage.

figuur 5




5p **8** ☐ Teken in de figuur op de bijlage het brandpunt en de richtlijn van $p$. Licht je werkwijze toe.

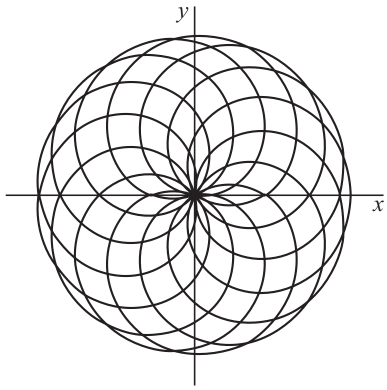
## Een beweging door (0, 0)

De beweging van een punt in het $Oxy$-vlak wordt voor $0 \le t \le 2\pi$ gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(15t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(15t) + \sin(2t) \end{cases}$$

In figuur 6 is de baan van het punt getekend.

figuur 6




6p **9** ☐ Bereken de exacte snelheid van het punt op tijdstip $t = 0$.

De bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(8\tfrac{1}{2}t) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(8\tfrac{1}{2}t) \end{cases} \text{ met } r(t) = 2\cos(6\tfrac{1}{2}t)$$

4p **10** ☐ Toon dit aan.

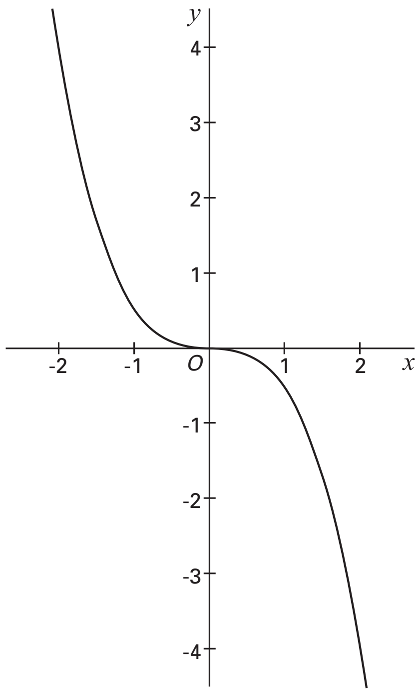
Bij het doorlopen van de baan van figuur 6 voor $0 \le t \le 2\pi$ passeert het punt een aantal keren (0, 0).

6p **11** ☐ Bereken dit aantal langs algebraïsche weg.

## Wel of niet convergent?

Voor elke beginwaarde $u_0$ is gegeven de rij $u_n = -\frac{1}{2}(u_{n-1})^3$ (voor $n = 1, 2, 3, \ldots$).
In figuur 7 en op de bijlage is de grafiek van de functie $y = -\frac{1}{2}x^3$ getekend.

figuur 7




Neem $u_0 = 1\frac{1}{2}$.

5p **12** ☐ Geef in de figuur op de bijlage op de $x$-as de waarden $u_1$ en $u_2$ aan met behulp van een webgrafiek.

Of de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ naar 0 convergeert, hangt af van de beginwaarde $u_0$.

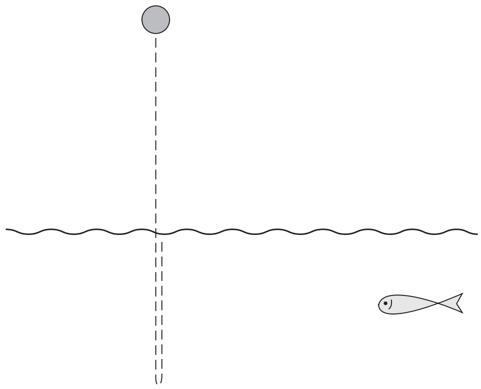
5p **13** ☐ Bereken exact voor welke waarden van $u_0$ de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ naar 0 convergeert.

## Bal te water

Een bal valt van enige hoogte in het water. Vanaf het moment dat de bal het wateroppervlak raakt, wordt hij afgeremd. Door zijn snelheid zal hij nog een stuk onder het wateroppervlak komen. Vervolgens zal de bal weer opstijgen naar het wateroppervlak. Zie figuur 8.
Voor de snelheid $v$, in meters per seconde, van een bepaalde bal die in het water valt, geldt de formule:

$$v(t) = 2 - 8e^{-2t}$$

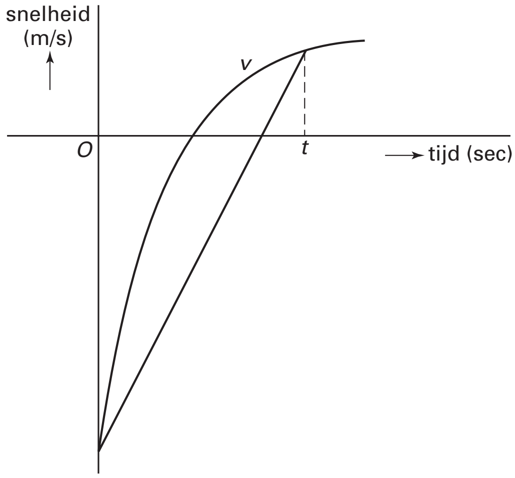
figuur 8



Hierbij is $t$ de tijd in seconden vanaf het moment dat de bal in het water komt; $v$ is positief als de bal omhoog gaat.
Deze formule geldt alleen zolang de bal onder water is. Ter vereenvoudiging verwaarlozen we de diameter van de bal.

In figuur 9 staat de grafiek van $v$ voor de periode dat de bal onder water is.
De gemiddelde versnelling (in m/s$^2$) van de bal tijdens de eerste $t$ seconden dat hij onder water is, is gelijk aan de helling van het verbindingslijnstuk tussen de punten op de grafiek van $v$ die horen bij de tijdstippen 0 en $t$. In figuur 9 is dit lijnstuk voor een waarde van $t$ getekend.

figuur 9




4p **14** ☐ Bereken de gemiddelde versnelling in m/s$^2$ gedurende de eerste 2 seconden. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De bal bereikt het diepste punt na ongeveer 0,7 seconden.

5p **15** ☐ Bereken het exacte tijdstip waarop de bal op het diepste punt is.

Het aantal meters dat de bal zich op een bepaald tijdstip onder het wateroppervlak bevindt, kun je berekenen door de snelheid te integreren.

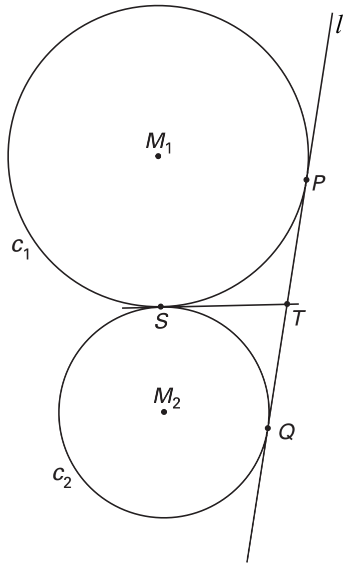
4p **16** ☐ Bereken de grootste diepte die de bal bereikt. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

## Op één lijn

In figuur 10 en op de bijlage zijn twee elkaar rakende cirkels $c_1$ en $c_2$ getekend met middelpunten respectievelijk $M_1$ en $M_2$. Het raakpunt van deze cirkels is $S$.
Lijn $l$ raakt $c_1$ in $P$ en $c_2$ in $Q$.
De gemeenschappelijke raaklijn aan $c_1$ en $c_2$ in $S$ snijdt lijn $l$ in punt $T$.

5p **17** ☐ Bewijs dat de punten $P$, $Q$ en $S$ op één cirkel met middelpunt $T$ liggen.

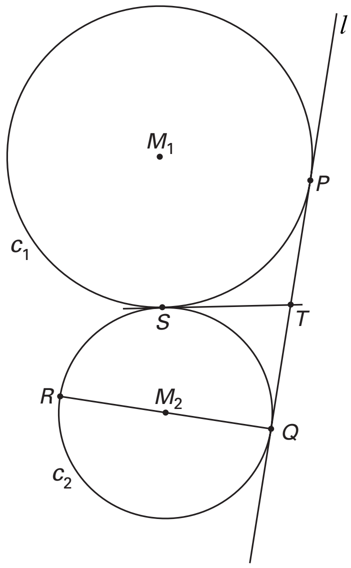
figuur 10




Verder is gegeven dat $QR$ een middellijn van $c_2$ is. Zie figuur 11. Ook deze figuur staat op de bijlage.

6p **18** ☐ Bewijs dat $P$, $S$ en $R$ op één lijn liggen.

figuur 11




**Einde**