

Voor dit examen zijn maximaal 91 punten te behalen; het examen bestaat uit 17 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

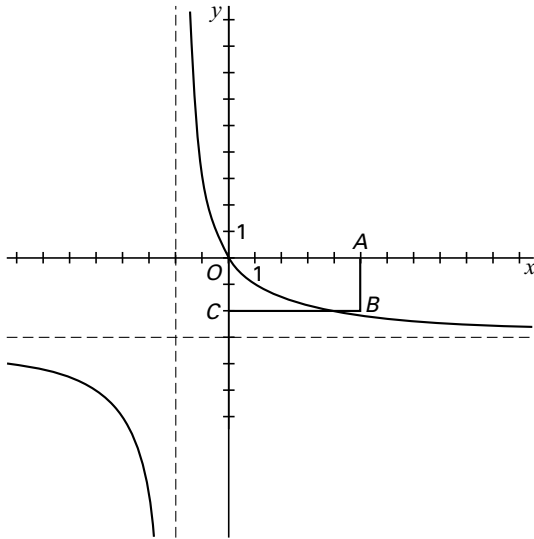
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Oppervlakte

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6}{x+2} - 3$. Zie figuur 1.

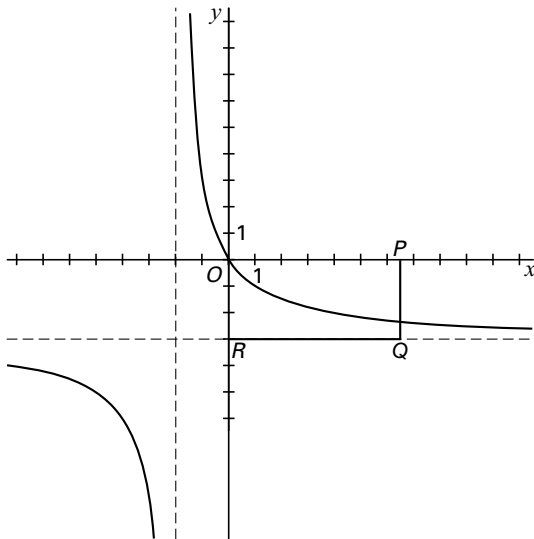
figuur 1



In figuur 1 is rechthoek $OABC$ getekend met $A(5, 0)$ en $C(0, -2)$. De raaklijn in O aan de grafiek van f verdeelt rechthoek $OABC$ in twee delen.

9p **1** Bereken exact de verhouding van de oppervlaktes van deze twee delen.

figuur 2



In figuur 2 is rechthoek $OPQR$ getekend met $R(0, -3)$ en $P(b, 0)$ met $b > 0$. De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

8p **2** Bereken b in twee decimalen nauwkeurig.

Hieronder staat een samenvatting van een krantenartikel afkomstig uit NRC-Handelsblad van 23 oktober 1997.

artikel

DEN HAAG, 23 OKT.

De Consumentenbond ver-richtte een smaaktest met een panel van 23 geofefende proe-vers. De proevers dronken het kraanwater van negen waterlei-dingbedrijven en negen ge-bottelde koolzuurvrije waters.

Opmerkelijk was dat het lek-kerste flessenwater werd ver-slagen door zes kraanwaters.

Tegelijkertijd met dit onder-zoek werd een onderzoek onder

Water met koolzuur

cafés gehouden. Wie in een café een glas mineraalwater bestelt, krijgt vaak een glas leidingwater vermengd met koolzuur. Dat concludeert de Consumentenbond in zijn gids van november. Onderzoekers kregen bij 11 van de 31 bezochte

horecagelegenheden hetzelfde water geserveerd als uit de kraan van het toilet van de uit-spanning. Achter de bar werd het water door een pompje van koolzuur voorzien.

In een reactie op de conclu-sies zegt directeur J.H. Peters van het Bedrijfschap Horeca dat de gesuggereerde omvang van het verschijnsel "schrome-lijk overdreven" is.

In het artikel wordt het opmerkelijk genoemd dat het lekkerste flessenwater werd verslagen door zes kraanwaters. Stel dat de 18 geproefde waters in een willekeurige volgorde worden geplaatst. Je kunt je nu afvragen hoe groot de kans is dat op de zevende plaats voor het eerst een flessenwater voorkomt.

- 5p **3** Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat op de zevende plaats voor het eerst een flessenwater voorkomt.

In een reactie op het onderzoek beweert de heer Peters dat de omvang van het verschijnsel schromelijk overdreven is.

Een café dat kraanwater-met-koolzuur serveert als mineraalwater noemen we een 'knoeier'. Misschien heeft Peters wel gelijk en schetst het artikel een te somber beeld. Veronderstel dat in werkelijkheid 20% van de cafés tot de 'knoeiers' behoort.

- 4p **4** Bereken in vier decimalen de kans dat in een aselechte steekproef van 31 cafés minstens 11 'knoeiers' voorkomen.

Het werkelijke percentage 'knoeiers' is onbekend.

De kans dat je in een café kraanwater-met-koolzuur krijgt wanneer je om mineraalwater vraagt noemen we p .

- 5p **5** Onderzoek bij welke waarden van p de kans op minstens 11 'knoeiers' in een steekproef van 31 cafés kleiner is dan 5%. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Laagste kosten

Een chauffeur moet met een vrachtwagen een traject van 100 km lengte rijden. Zijn firma wil weten bij welke snelheid de totale vervoerkosten het laagst zijn. Een vrachtwagen verbruikt bij een snelheid van 60 kilometer per uur voor elke kilometer $\frac{1}{2}$ liter brandstof. Bij toename van de snelheid neemt het verbruik exponentieel toe: bij elke toename van de snelheid met 10 kilometer per uur stijgt het verbruik per kilometer met 10%.

Het arbeidsloon van de chauffeur is f 90,- per uur.

De brandstofkosten zijn f 3,- per liter.

De totale vervoerkosten bestaan uit brandstofkosten en het arbeidsloon van de chauffeur.

- 6p **6** Toon aan dat de totale vervoerkosten over het traject bij een snelheid van 80 kilometer per uur f 294,- bedragen.
- 7p **7** Bereken bij welke snelheid de totale vervoerkosten het laagst zijn. Rond je antwoord af op hele kilometers per uur.

Geneesmiddelenonderzoek

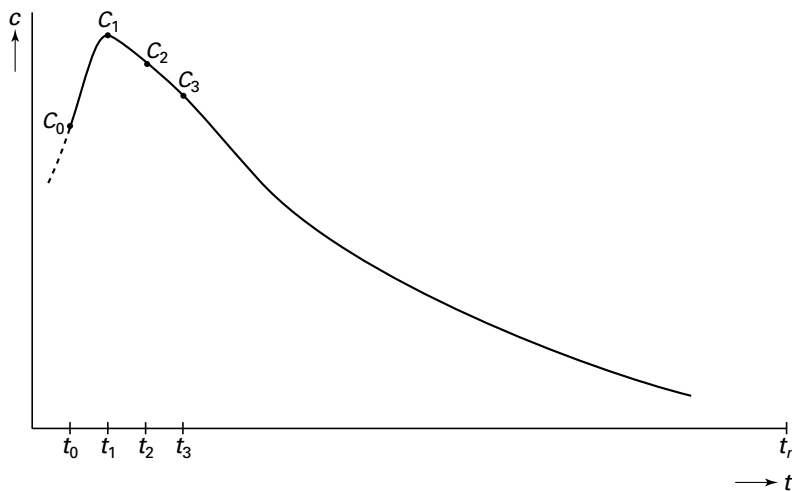
Deze opgave gaat over een voorbeeld uit de farmacokinetiek, de wetenschap die onder andere het verloop bestudeert van de concentratie van een geneesmiddel in het bloed.

In een praktijktest wordt op geregelde tijden met tussenpozen Δt de concentratie van een geneesmiddel bij een persoon gemeten.

Op de tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ is de gemeten concentratie $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$. In figuur 3 zijn de punten $C_k(t_k, c_k)$ weergegeven. Deze punten liggen op de kromme die het verloop weergeeft van de concentratie van dit geneesmiddel.

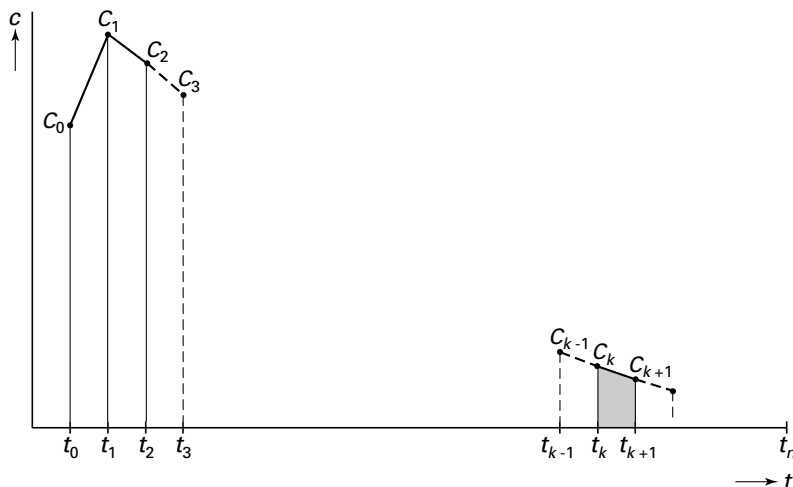
Een maat voor de werkzaamheid van een geneesmiddel is de oppervlakte onder deze kromme. In de farmacokinetiek noemt men dit de AUC (Area Under Curve).

figuur 3



In figuur 4 is aangegeven hoe de oppervlakte onder de kromme benaderd kan worden. Twee opeenvolgende meetpunten bepalen een trapezium. Het trapezium tussen t_k en t_{k+1} is grijs aangegeven. De som van de oppervlakten van alle trapezia is een benadering van de AUC.

figuur 4



De vraag rijst natuurlijk "Hoe nauwkeurig is deze methode?". Dit gaan we in deze opgave voor een speciaal geval onderzoeken.

3p **8** Toon aan dat de oppervlakte van het grijsgemaakte trapezium gelijk is aan $\frac{1}{2}(c_k + c_{k+1}) \cdot \Delta t$

4p **9** Bewijs dat de AUC tussen t_0 en t_n benaderd wordt door $\left(\frac{1}{2}(c_0 + c_n) + \sum_{p=1}^{n-1} c_p \right) \cdot \Delta t$

Om de nauwkeurigheid van deze manier van benaderen aan de hand van een voorbeeld te testen, nemen we aan dat het dalende gedeelte van de kromme gegeven wordt door $c = 32 \cdot e^{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}$ met c in mg/liter en t in uren, $1 \leq t \leq 5$.

5p **10** Bewijs met behulp van integraalrekening dat de AUC voor $1 \leq t \leq 5$ gelijk is aan $64 - \frac{64}{e^2}$.

Neem aan dat de concentratie om het half uur gemeten wordt en dat de meetpunten inderdaad op de grafiek van c liggen.

7p **11** Bereken hoeveel procent de benadering van de AUC voor $1 \leq t \leq 5$, bepaald met behulp van de formule van vraag 9, afwijkt van de werkelijke oppervlakte. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De hoeveelheid werkzame stof per tablet van het geneesmiddel mag niet te hoog zijn omdat er dan schadelijke bijwerkingen optreden. Maar ze mag ook niet te laag zijn omdat het middel dan onvoldoende effect heeft. De hoeveelheid werkzame stof in een tablet is normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 mg en een standaardafwijking van 3 mg. Het medicijn is effectief en niet schadelijk als de hoeveelheid werkzame stof per tablet tussen de 90 mg en 110 mg ligt.

5p **12** Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een tablet effectief en niet schadelijk is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

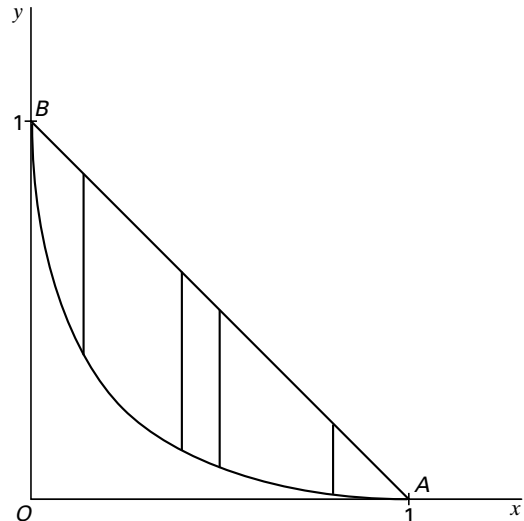
Machten van sinus en cosinus

Gegeven is de functie $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ met $0 \leq x \leq 1$.

Verder is gegeven het lijnstuk AB met $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Zie figuur 5.

Tussen de grafiek van f en het lijnstuk AB worden verticale verbindingslijnstukken getekend. In figuur 5 zijn enkele verbindingslijnstukken getekend.

figuur 5



5p **13** Toon aan dat de lengte van een verticaal verbindingslijnstuk gegeven wordt door de formule $L = -2x + 2\sqrt{x}$.

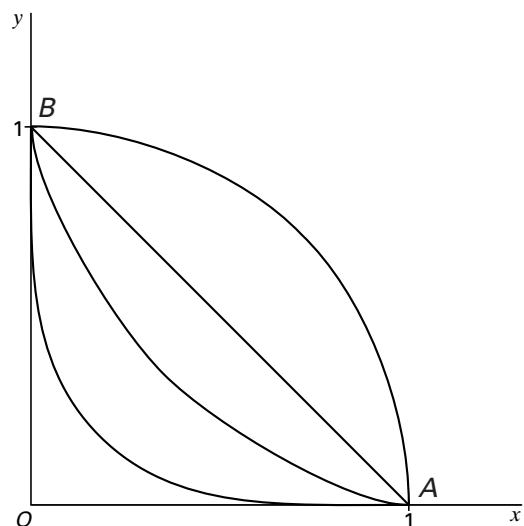
4p **14** Bereken exact de maximale lengte van zo'n verbindingslijnstuk.

Voor elk positief geheel getal n bekijken we de baan K_n van een punt dat beweegt volgens

$$\begin{cases} x(t) = \cos^{2n} t \\ y(t) = \sin^{2n} t \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi.$$

In figuur 6 zijn vier banen getekend.

figuur 6



Gegeven een punt P van K_6 .

5p **15** Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan K_6 in punt P gelijk is aan $-\tan^4 t$.

In een punt P van K_6 heeft de raaklijn aan K_6 richtingscoëfficiënt -9 .

3p **16** Bereken de coördinaten van P .

Voor een bepaalde waarde van n liggen de punten van K_n op de grafiek van f en voor een bepaalde waarde van n liggen de punten van K_n op het lijnstuk AB .

6p **17** Onderzoek welke twee waarden van n dit zijn en toon met behulp van formules de juistheid van je bewering aan.

Einde