Wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20**03**

Tijdvak 2
Woensdag 18 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen; het examen bestaat uit 16 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Loterij

Ter gelegenheid van een jubileum organiseert een grote universiteit een loterij. Elke student krijgt één lot. Er vinden twee trekkingen plaats. Bij de eerste trekking wordt bepaald op welke nummers een hoofdprijs van € 500,- valt. Deze nummers worden teruggedaan en uit het totaal worden vervolgens de nummers getrokken waarop een troostprijs van € 100,- valt. Op 5% van de loten valt een prijs van € 500,- en op 20% van de loten een prijs van € 100,-. Op één lot kunnen dus zowel een hoofd- als een troostprijs vallen.

Thomas is één van de studenten die zo'n lot gekregen heeft.

4p **1** ☐ Toon aan dat de kans dat Thomas minstens één prijs wint, gelijk is aan 0,24.

Een studentenvereniging bestaande uit 20 studenten spreekt af dat ieder lid het gewonnen prijzengeld in de clubkas stort. Aan het eind van het studiejaar zal er dan een activiteit georganiseerd worden die betaald wordt met het prijzengeld.

3p **2** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat minstens acht leden van de studentenvereniging in de prijzen vallen.

4p **3** ☐ Bereken hoeveel prijzengeld de studentenvereniging bij de twee trekkingen naar verwachting zal winnen.

Gebroken functie

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

5p **4** ☐ Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de lijn $y = 5$ en de grafiek van f.

6p **5** ☐ Bereken met behulp van primitiveren de exacte waarde van de oppervlakte van V.

4p **6** ☐ Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

Vervoer

Een transportonderneming brengt elke dag over een vast traject verse vlaaien van Limburg naar Twente. De tijd die daarvoor nodig is, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,5 uur en een standaardafwijking van een kwartier. De vlaaien moeten om half negen afgeleverd zijn.
Enerzijds wil de directeur de loonkosten van de chauffeur beperken door hem niet te vroeg te laten vertrekken. Anderzijds kan de directeur zich niet permitteren om op meer dan 5% van de dagen de vlaaien te laat af te leveren.

6p **7** ☐ Bereken, in minuten nauwkeurig, hoe laat de chauffeur moet vertrekken.

Op zijn dagelijkse ritten is het de chauffeur opgevallen dat er door veel automobilisten veel te hard gereden wordt op de stukken waar de maximumsnelheid van 120 km per uur geldt. Hij is er dan ook niet verbaasd over dat bij een controle blijkt dat 13% van de automobilisten harder rijdt dan 137 km per uur.
Neem aan dat de gereden snelheid normaal verdeeld is met een gemiddelde snelheid van 126 km per uur.

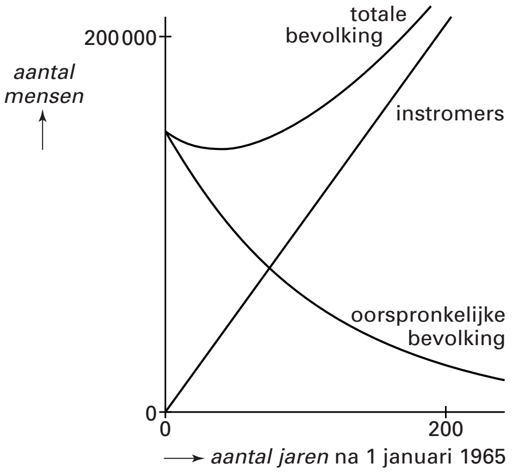
6p **8** ☐ Bereken hoeveel procent van de automobilisten zich aan de maximumsnelheid houdt.

Migratie

In een bepaalde streek in Frankrijk trekt de oorspronkelijke bevolking weg, omdat de economische situatie daar slecht is. De rust van de streek trekt evenwel buitenlanders aan die er gaan wonen. We nemen aan dat na verrekening van de effecten van sterfte en geboorte het volgende model geldt.
Op 1 januari 1965 wonen er in de streek 150 000 mensen, uitsluitend oorspronkelijke bevolking. Jaarlijks vertrekt 1% van de aanwezige oorspronkelijke bevolking. Vanaf 1 januari 1965 komen er elk jaar evenveel mensen in de streek wonen: de zogenaamde 'instromers'. Dat constante aantal noemen we c. We gaan er in beide gevallen van uit dat het aantal mensen geleidelijk verandert en niet schoksgewijs.
Op een bepaald moment, het 'omslagmoment', zullen er evenveel oorspronkelijke bewoners als instromers in de streek wonen.

Neem bij de vragen 9 en 10 aan dat $c = 1000$. Zie figuur 1.

figuur 1

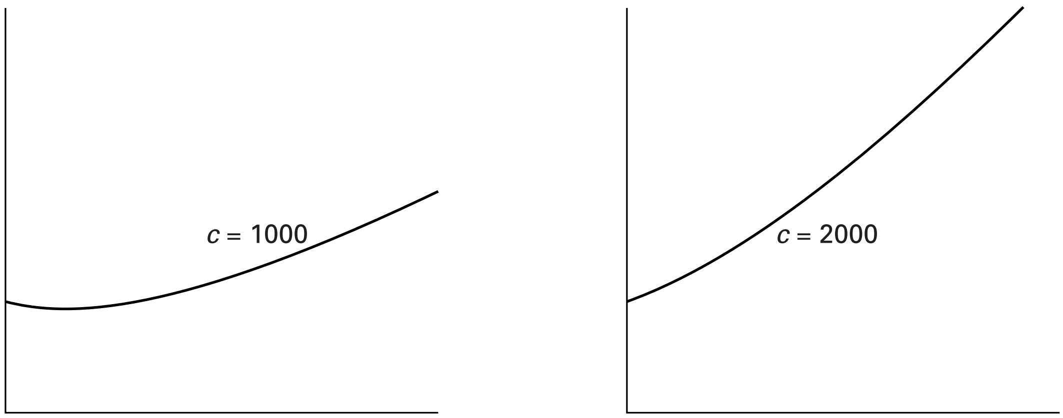


6p **9** ☐ Bereken in welk jaar het 'omslagmoment' zich voor zal doen.

4p **10** ☐ Bereken in welk jaar de totale bevolking minimaal zal zijn.

De omvang van de *totale* bevolking van de streek kan zich na 1 januari 1965 op twee manieren ontwikkelen, afhankelijk van de waarde van c:
1. de omvang van de totale bevolking daalt eerst een aantal jaren en stijgt vervolgens, zoals bij $c = 1000$;
2. de omvang van de totale bevolking stijgt direct vanaf het begin, zoals bij $c = 2000$.
Zie figuur 2.
We gaan er nog steeds van uit dat het aantal mensen geleidelijk verandert en niet schoksgewijs.

figuur 2



5p **11** ☐ Bereken voor welke waarden van c de totale bevolking na 1 januari 1965 steeds stijgt.

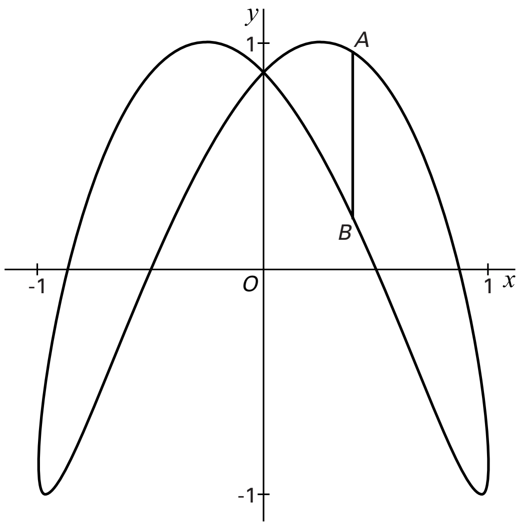
Lissajous-kromme

De baan van een punt P wordt bepaald door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Zie figuur 3.

figuur 3



4p **12** ☐ Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x-as.

P passeert de y-as steeds met dezelfde snelheid.

7p **13** ☐ Bereken de exacte waarde van deze snelheid.

Op het tijdstip $t = a$ bevindt het punt P zich in A en op het tijdstip $t = \pi - a$ in B, met $0 < a < \frac{1}{2}\pi$. A en B liggen op een verticale lijn. Zie figuur 3.

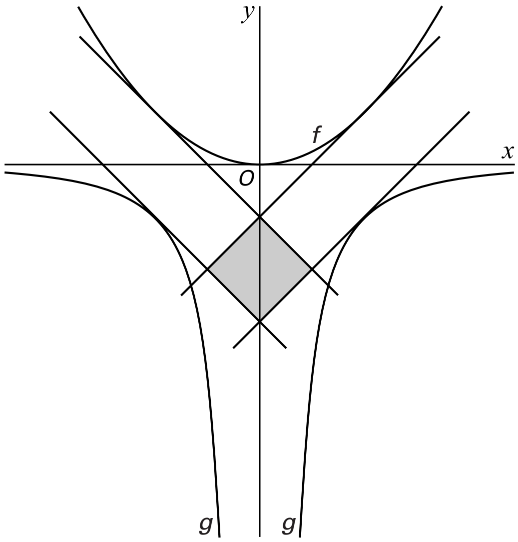
6p **14** ☐ Bewijs dat de lengte van AB gelijk is aan $\sin 2a$.

Oppervlaktes

Gegeven zijn de functies $f : x \to \frac{1}{4}x^2$ en $g : x \to -\dfrac{4}{x^2}$.

De raaklijnen aan de grafieken van *f* en *g* met richtingscoëfficiënt 1 en richtingscoëfficiënt –1 sluiten een vierkant in. Zie figuur 4.

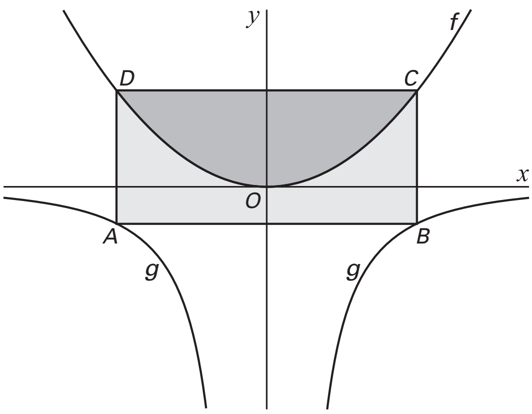
figuur 4



7p **15** ☐ Bereken de lengte van de diagonaal van dit vierkant.

De lijn $x = a$, met $a > 0$, snijdt de grafiek van *f* in *C* en de grafiek van *g* in *B*. De lijn $x = -a$ snijdt de grafiek van *f* in *D* en de grafiek van *g* in *A*.
De grafiek van *f* deelt de rechthoek *ABCD* in twee stukken met gelijke oppervlaktes. Zie figuur 5.

figuur 5



7p **16** ☐ Bereken de waarde van *a*.

Einde