
Formulekaart Wiskunde havo/vwo

Vierkantsvergelijking

Als $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$, dan worden de oplossingen van de vierkantsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Machten en logaritmen

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a > 0)$$

$$(a^p)^q = a^{pq} \quad (a > 0)$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \quad (a, b > 0)$$

$$a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p} \quad (a > 0)$$

$$b = a^p \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p}} \quad (a, b > 0, p \neq 0)$$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = {}^a \log y \quad (a, y > 0, a \neq 1)$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \quad (y > 0)$$

$${}^a \log uv = {}^a \log u + {}^a \log v \quad (a > 0, a \neq 1, u, v > 0)$$

$${}^a \log u^v = v \cdot {}^a \log u \quad (a > 0, a \neq 1, u > 0)$$

$${}^a \log u = \frac{{}^b \log u}{{}^b \log a} \quad (a, b > 0, a, b \neq 1, u > 0)$$

Binomium van Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{met} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Goniometrische formules

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

$$\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

$$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$$

Somformules voor rijen

Rekenkundige rij:

$$\sum_{k=0}^n (a + kv) = (n+1)a + \frac{1}{2}n(n+1)v$$

Meetkundige rij:

$$\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1$$

Lineaire differentievergelijkingen

De oplossing van de lineaire differentievergelijking $X_{t+1} = aX_t + b$ met $a \neq 1$ is

$$X_t = \frac{b}{1-a} + \left(X_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^t$$

Voor $|a| < 1$ geldt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \frac{b}{1-a}$$

Kansrekening

Binomiale verdeling met parameters n en p

Kansverdeling: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, \dots, n)$

Verwachting: $E(X) = np$

Variatie: $Var(X) = np(1-p)$

Standaardafwijking: $\sigma(x) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Normale verdeling met verwachting μ en standaardafwijking $\sigma > 0$

Cumulatieve verdelingsfunctie:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Voor $\mu = 0$ en $\sigma = 1$ is dit de zg. *standaardnormale verdeling* met cumulatieve verdelingsfunctie

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Als X normaal verdeeld is met verwachting μ en standaardafwijking σ , dan is de stochast $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

standaardnormaal verdeeld. Omrekenformules:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{en} \quad \Phi(z) = P(X \leq \mu + \sigma z)$$

Voor willekeurige stochastische variabelen geldt

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

Voor onderling onafhankelijke stochastische variabelen geldt

$$Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$$

Limieten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

Differentiëren en integreren

functie	afgeleide	
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	
$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$	
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	(productregel)
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	(quotiëntregel)
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	(kettingregel)

Differentiëren en primitiveren van standaardfuncties:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^p	$p \cdot x^{p-1}$	x^p	$\frac{1}{p+1} x^{p+1} + c \quad (p \neq -1)$
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	e^x	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + c$
${}^a \log x$	$\frac{1}{x \ln a}$	e^x	$e^x + c$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x \ln x - x + c$
$\sin x$	$\cos x$	${}^a \log x$	$\frac{1}{\ln a} (x \ln x - x) + c$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cos x$	$\sin x + c$

Lineaire benadering van f in x_0 : $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie f op het interval $[a, b]$ om de x -as te wentelen:

$$I = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Lengte van de grafiek van de functie f op het interval $[a, b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Bewegingen in het vlak

Als $(x(t), y(t))$ de positie in het Oxy -vlak geeft van een bewegend punt op het tijdstip t , dan wordt de *snelheidsvector* op het tijdstip t gegeven door $(x'(t), y'(t))$. De (scalaire) snelheid van het punt op het tijdstip t wordt gegeven door

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

en de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen $t = a$ en $t = b$ door

$$\int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Eenparige cirkelbeweging met middelpunt (m, n) , straal r en hoeksnelheid ω :

$$\begin{cases} x(t) = m + r \cos \omega(t - t_0) \\ y(t) = n + r \sin \omega(t - t_0) \end{cases}$$

Harmonische trilling met evenwichtsstand c , amplitude A en periode T :

$$h(t) = c + A \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$$

Continue dynamische modellen

Exponentiële groei of verval:

differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dt} = c \cdot y$

oplossingen: $y(t) = y(t_0)e^{c(t-t_0)}$

Logistische groei:

differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dt} = c \cdot y(M - y)$ met $M > 0$

oplossingen: $y(t) = \frac{M \cdot y(t_0)}{y(t_0) + (M - y(t_0))e^{-cM(t-t_0)}}$

Lijnen en cirkels in het vlak

Algemene vergelijking van een lijn: $ax + by = c$

Normaalvector: (a, b)

Voor twee lijnen ℓ_1 en ℓ_2 met normaalvectoren (a_1, b_1) en (a_2, b_2) geldt:

$$\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

Lijn door (p, q) met richtingscoëfficiënt m : $y = q + m(x - p)$

Voor twee lijnen ℓ_1 en ℓ_2 met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt:

$$\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Vergelijking van de cirkel met middelpunt (m, n) en straal r :

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Omtrek: $2\pi r$; lengte boog met middelpuntshoek α (rad): αr

Oppervlakte: πr^2 ; opp. sector met middelpuntshoek α (rad): $\frac{1}{2} \alpha r^2$

Kegelsneden

Parabool:

$$\begin{aligned} \text{standaardvergelijking:} & \quad 4py = x^2 \\ \text{brandpunt } F: & \quad (0, p) \\ \text{richtlijn } r: & \quad y = -p \\ P \text{ op parabool} & \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r) \end{aligned}$$

Ellips:

$$\begin{aligned} \text{standaardvergelijking:} & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 && \text{met } a > b > 0 \\ \text{brandpunten } F_{1,2}: & \quad (\pm c, 0) && \text{met } c^2 = a^2 - b^2 \\ P \text{ op ellips} & \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \end{aligned}$$

Hyperbool:

$$\begin{aligned} \text{standaardvergelijking:} & \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{brandpunten } F_{1,2}: & \quad (\pm c, 0) && \text{met } c^2 = a^2 + b^2 \\ \text{asymptoten:} & \quad y = \frac{b}{a}x \text{ en } y = -\frac{b}{a}x \\ P \text{ op hyperbool} & \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \end{aligned}$$

Raaklijneigenschappen:

1. De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.
2. De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de beide brandpunten.

Vlakke meetkunde

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzingen in een bewijs gebruikt worden.

Hoeken, lijnen en afstanden

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (*overstaande hoeken*).

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Een rechte hoek is 90° ; een gestrekte hoek is 180° .

De som van de hoeken van een driehoek is 180° (*hoekensom driehoek*).

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (*afstand punt tot lijn*).

Driehoeksongelijkheid: Als drie punten A, B, C niet op één lijn liggen, dan geldt $|AB| + |BC| > |AC|$.

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek:

1. Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk.
2. Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk.

Stelling van Pythagoras: Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$

Omgekeerde stelling van Pythagoras: Als in driehoek ABC geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek C recht.

Cosinusregel: In elke driehoek ABC geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Sinusregel: In elke driehoek ABC geldt $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Gelijke driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:

- a. Een zijde en twee aanliggende hoeken. (HZH)
- b. Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek. (ZHH)
- c. Twee zijden en de ingesloten hoek. (ZHZ)
- d. Alle zijden. (ZZZ)
- e. Twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (ZZR)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- a. Twee paren hoeken. (hh)
- b. Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden. (zhz)
- c. De verhouding van de zijden. (zzz)
- d. Een paar rechte hoeken en de verhouding van twee niet-omliggende zijden. (zrz)

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (*hoekensom vierhoek*).

Equivalenten definities en eigenschappen van een *parallellogram*:

- a. Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
- b. Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
- c. Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig,
- d. De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalenten definities en eigenschappen van een *ruit*:

- a. Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- b. Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- c. Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalenten definities en eigenschappen van een *rechthoek*:

- a. Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- b. Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- c. Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Puntverzamelingen

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B , is de middelloodlijn van het lijnstuk AB (*middelloodlijn*).

De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de deellijn (bissectrice) van die hoek (*deellijn*).

De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de cirkel met middelpunt M en straal r (*cirkel*).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).

De twee deellijnen van twee elkaar snijdende lijnen snijden elkaar loodrecht in het snijpunt van die twee lijnen (*loodrechte stand deellijnenpaar*).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).

Cirkeleigenschappen

Bij gelijke bogen behoren gelijke koorden (*boog en koorde*).

De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde*).

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindinglijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn*).

Stelling van Thales: Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB .

Omgekeerde stelling van Thales: Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is $\angle ACB$ recht.

Stelling van de omtrekshoek: Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.

De hoek tussen een raaklijn en een koorde is gelijk aan de bij die koorde behorende omtrekshoek (*hoek tussen koorde en raaklijn*).

Liggen P en Q aan dezelfde kant van een lijn AB en geldt $\angle APB = \angle AQB$, dan liggen P en Q op eenzelfde cirkelboog met A en B als eindpunten (*hoeken op een cirkelboog*).

Koordenvierhoekstelling: In een koordenvierhoek is de som van elk paar overstaande hoeken 180° .

Omgekeerde koordenvierhoekstelling: Liggen P en Q aan weerszijden van een lijn AB en geldt $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$, dan is $APBQ$ een koordenvierhoek.

De *Formulekaart Wiskunde havo/vwo* is gepubliceerd in *Uitleg*, Gele Katern nr. 12a, CEVO-98/257. Deze versie van de *Formulekaart* is samengesteld door Dick Klingens met gebruikmaking van Microsoft Word for Windows 95™, versie 7.0 (Microsoft Corporation) en MathType™, versie 3.5b (Design Science, Inc.).