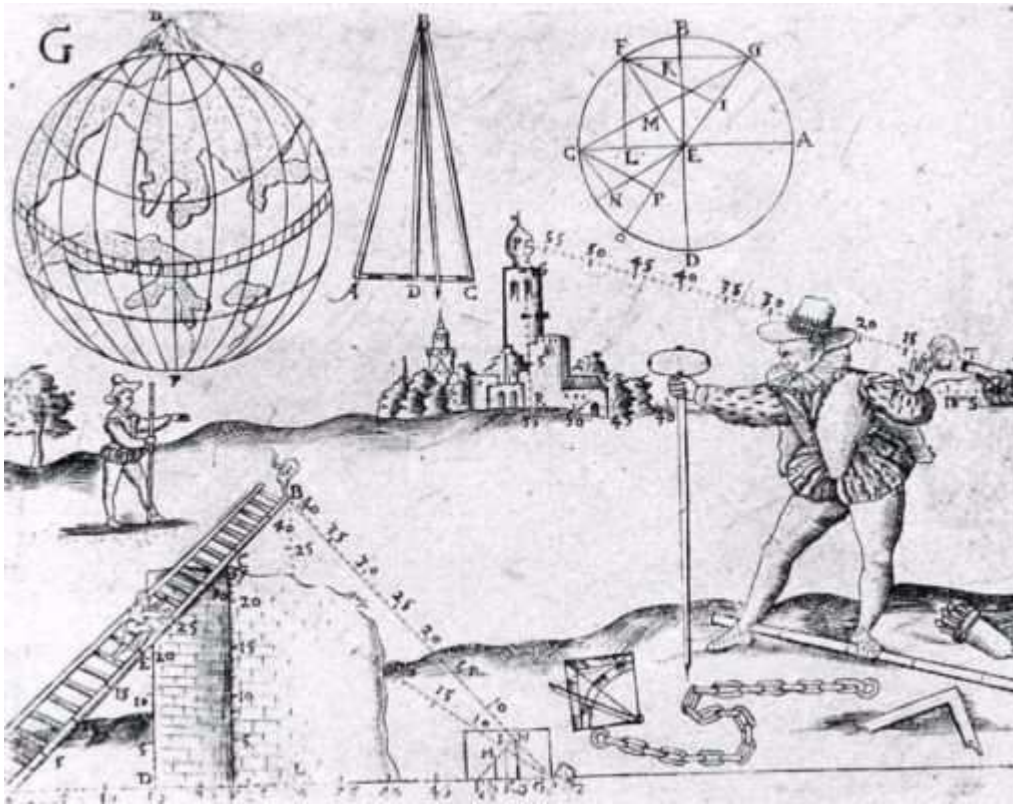


Questien 12

Sybrandt Hansz Cardinael



Wat is de hoogte van de kerktoren in Bussum?

Meetkunde
3 VWO
4 lesuren

Tegenwoordig hebben we hele handige elektronische apparaten om de hoogte van bijvoorbeeld torens te vinden. Hiermee kunnen we tot op de millimeter nauwkeurig de hoogte van de kerktoeren in het centrum van Bussum vinden.

Deze handige apparaten hadden ze vroeger niet. Maar vroeger konden ze ook de hoogte van kerktoeren berekenen. De wiskundige Sybrandt Hansz Cardinael (1578–1647) heeft in 1614 een hele mooie manier beschreven.

Tijdens de Gouden Eeuw in 17^{de} eeuw was er in Nederland een grote economische groei. De werkgelegenheid nam razendsnel toe en er kwamen veel nieuwe gebouwen. Dit betekende extra werk voor landmeters, architecten en vaklieden. En vooral ook voor wiskundigen die hier allemaal berekeningen aan moesten doen.

Een beroemd boek voor landmeters en wiskundigen uit die tijd was 'Practijck des Landmetens' geschreven door Sems en Dou.

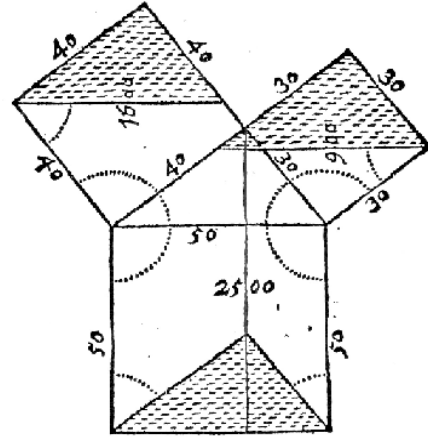
Bij dit boek zaten 'Honderd Geometrische Questien' van Sybrandt Hanszoon Cardinael (zie figuur hiernaast).

Over Questien 12 gaat deze opdracht:

Honderd Geometrische questien met hare solutien.

Door

Sybrandt Hansz. van Harlinghen,
Reeckennecster tot Amsterdam.



T'AMSTERDAM,

Ghedrukt by Willem Jansz. op het Water/
in de vergulde Sonnetwysse.

XII.

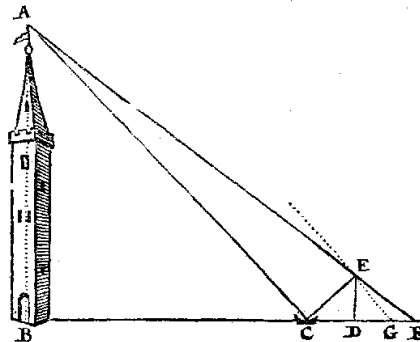
Besiet de naervolgende figure.

Hebbende gelept op een secker plaets (als by exempel in desen in C) een Spiegel / om daer door de

14

hoogte van de Coren A B te meten / so ben ick inde rechte linie CB recht achterwaerts ghegaen van de spiegel C, tot in D 8 voeten / alsoo dat ick ober een stock D E in de spiegel ghesien hebbe het top des torens A, ende sonder de stock te hercoeren / ben ick noch achterwaerts gegaen neghen voeten tot in F, alsoo dat ick in F met mijn gesicht ober de stock E D het top des Corens A gesien hebbe. De vraaghe is dan / so de stock E D lanc is 6 voeten / hoe veel voeten sulcken Coren hoogh is?

Om de hoogte van desen Coren te vinden / soo treck ick CD 8 van DE 9 / rest 1 voor GF. En spreect GF 1 / gheben my ED 6 voeten / wat sal my gheben CF 17 / ende sal komen 102 voeten voor de hoogte des Corens A B. De reden van sulcken werck is: om dat den trianghel CDE, van een proportie is als ABC, ende de trianghel



EDF van een proportie als ABF, daerom als my nu E DG ghelijck maecten CDE, soo is EGF noch van een proportie als ACF, om dat EG parallele is met AC, alsoo dat dan ghelijck GF staet reghen ED, alsoo staet noch CF tegen AB, de Corens hooghre,

De opdracht:

Je maakt een groepje van 3 leerlingen waar je de metingen mee zult uitvoeren. Elk groepje krijgt een spiegel, een stok en een meetlint mee. Zorg er zelf voor dat je papier en je rekenmachine bij je hebt.

We hebben 4 lessen voor deze opdracht, waar we de eerste en de laatste les in het lokaal zullen doorbrengen en de tweede en derde les op het marktplein van het centrum van Bussum.

- **Les 1**

In het lokaal gaan jullie met je groepje al wat brainstormen over hoe jullie het probleem aan gaan pakken. Jullie gaan de berekeningen die in de bijlage staan bestuderen en uitwerken voor enkele door jullie zelf verzonden getallen.

Bekijk ook het plaatje hierboven dat in oud Nederlands door Cardinael geschreven is. Kijk of je er wat uit kunt halen dat je begrijpt.

- **Les 2**

We verzamelen ons voor de kerktoren op het marktplein van Bussum. We zetten allemaal onze fietsen in de fietsenstalling voor de bibliotheek tegenover de Mc Donalds.

Hiervandaan zoekt elk groepje een mooie plek rondom de kerk om zijn metingen uit te voeren. Let op dat je niet in de weg staat voor fietsers, voetgangers of automobilisten.

Je zult rechtstreeks aan het begin van de les naar het marktplein gaan, zonder eerst naar het lokaal te komen. Probeer er zo snel mogelijk te komen, want je zult merken dat een lesuur snel voorbij is. Je docent zal ook op het marktplein rondlopen zodat je wat vragen kunt stellen. Zorg er wel voor dat je op tijd weggaat zodat je op tijd bij je volgende les komt.

Voer de metingen uit die je nodig hebt om de hoogte van de toren te kunnen berekenen. Kijk eventueel in de bijlage waar een voorbeeld staat, voor welke gegevens je nodig hebt.

Je zult heel erg nauwkeurig te werk moeten gaan, want als je zelfs één centimeter in je meting verkeerd zit, dan kan het al zijn dat je berekeningen erg zullen afwijken van de werkelijke hoogte.

- **Les 3**

In deze les zullen we verder gaan waar we in les 2 gebleven zijn. Ben je in les 2 al heel ver gekomen, ga dan op een hele andere plek staan (verder of dichterbij de toren) en doe je metingen opnieuw.

- **Les 4**

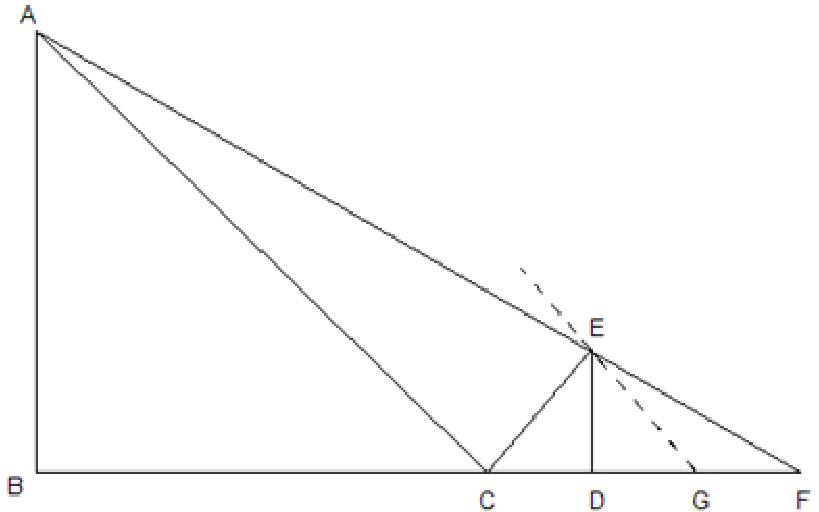
In deze laatste les die we in het lokaal zullen doorbrengen zullen we de berekeningen uitvoeren en met de klas tot een mooie schatting van de hoogte van de toren komen.

Bijlage

We maken een schets van de situatie. Zie de tekening hiernaast. In AB staat de kerktoeren. Deze lengte willen we gaan berekenen.

Als we de lengte van BD zouden kunnen opmeten, dan zou het probleem een stuk eenvoudiger worden. Helaas kunnen we dit niet, aangezien we een meetlint hebben van slechts 2 meter.

Cardinael bedacht deze manier om de hoogte van torens te kunnen bepalen als het om praktische redenen de voet van de toren niet te bereiken was.



We plaatsen een spiegel in punt C zodat we vanuit de bovenkant van de stok (punt E) de bovenkant van de toren nog net kunnen zien. Dit is een moeilijk punt waar je heel nauwkeurig te werk moet gaan. Laat elk lid uit het groepje deze meting uitvoeren en probeer samen tot de nauwkeurigste meting te komen. Wellicht helpt het als je één oog dicht doet en deze zo dicht mogelijk tegen punt E aanhoudt.

Vervolgens gaan we een punt F kiezen, zodanig dat al je vanuit punt F kijkt, je via E het puntje van de kerktoeren nog net ziet. Hier zul je dus ook heel nauwkeurig te werk moeten gaan. Aangezien het onmogelijk is om je ogen op de grond te leggen, zul je moeten proberen om dit zo nauwkeurig mogelijk te doen. Misschien weer met één oog dicht en je hoofd zo dicht mogelijk tegen de grond.

Bij het bepalen van deze twee punten zijn de kans op fouten heel erg groot, waarbij je dus straks verkeerde gegevens gaat gebruiken voor het bepalen van AB. Let dus goed op!

De slimste ontdekking van Cardinael bij dit probleem was de vondst van hulplijntje GE. We kiezen een punt G zodanig dat $CD = DG$.

Vanuit de natuurkunde weten we dat de hoek van inval gelijk is aan de hoek van uitval. Dus er moet gelden: $\angle ACB = \angle DCE$ en dus dat de driehoeken FGE en FCA gelijkvormig zijn. De driehoeken ABC en EDC zijn ook gelijkvormig (ga dit na!). Hieruit volgt dus dat

$$\begin{array}{l} \Delta FGE \propto \Delta FCA \\ \frac{FG}{FC} = \frac{FE}{FA} = \frac{GE}{CA} \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} \Delta ABC \propto \Delta EDC \\ \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC} \end{array}$$

We willen graag uit deze gegevens AB vinden:

$$AB = \frac{ED \times AC}{DC} = \frac{BC \times ED}{DC} \quad \text{en aangezien we } BC \text{ niet kunnen meten houden we } AB = \frac{ED \times AC}{DC}$$

(vergelijking 1) over, want ED en DC kunnen we meten.

We moeten nu nog alleen AC uit kunnen rekenen:

$$AC = \frac{FC \times GE}{FG} \quad (\text{vergelijking 2}), \text{ waarvan zowel } FC, GE \text{ en } FG \text{ te meten of berekening is (ga na!).}$$

Uit vergelijking 1 en 2 krijgen we:

$$AB = \frac{ED \times AC}{DC} = \frac{ED \times \frac{FC \times GE}{FG}}{DC} = \frac{ED \times FC \times GE}{DC \times FG} = \frac{ED \times FC \times EC}{DC \times FG} = \frac{ED \times FC}{FG}$$

We hebben dus alleen de lengte van ED, FC en FG nodig om de lengte van AB uit te kunnen rekenen.

ED is de lengte van de stok (kun je meten), ook FC en FG kun je probleemloos opmeten!